Buku Perkuliahan Program S-1
Program Studi Hukum Ekonomi Syariah (Muamalah)
Fakultas Syari'ah dan Hukum UIN Sunan Ampel

Lilik Rahmawati, S.Si., M.EI

Matematika EKONOMI

Supported by:
Government of Indonesia (GoI) and
Islamic Development Bank (IDB)

MATEMATIKA EKONOMI

Buku Perkuliahan Program S-1
Jurusan Ekonomi Syari'ah Fakultas Ekonomi dan Bisnis Islam
UIN Sunan Ampel Surabaya

Penulis:
Lilik Rahmawati, S.Si., M.EI

Supported by:
Government of Indonesia (GoI) and Islamic Development Bank (IDB)

MATEMATIKA EKONOMI

Penulis:
Lilik Rahmawati, S.Si., M.EI.

Editor:
Siti Musfiqoh, M.EI

Cet.1- Surabaya: UIN SA Press,
November 2014

vi+ 164 hlm 17 x 24 cm

ISBN : 978-602-1072-94-3

Cover :
Citra Ayu M.

Diterbitkan :
UIN Sunan Ampel Press
Anggota IKAPI
Gedung SAC.Lt.2 UIN Sunan Ampel
Jl. A. Yani No. 117 Surabaya
☎(031) 8410298-ext. 138
Email : sunanampelpress@yahoo.co.id

Dicetak :
CV. Cahaya Intan XII
Komplek ruko GRAHA ANGGREK MAS REGENCY No. A-01
Jl. Raya Pagerwojo-SIDOARJO
☎(031) 8070 603
Email : cahayaintanxii@yahoo.com

Paket 1
FUNGSI DALAM KAJIAN MATEMATIKA

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep dasar fungsi dalam kajian matematika. Kajian dalam paket ini meliputi pengertian fungsi, unsur-unsur fungsi, dan jenis-jenis fungsi dalam kajian matematika. Secara umum, paket ini sebagai pengantar materi sesudahnya, sehingga paket ini merupakan paket dasar. Uraian yang lebih rinci mengenai fungsi-fungsi tertentu disajikan dalam paket-paket sesudahnya, sekaligus dengan bahasan mengenai penerapan ekonomi dari fungsi yang bersangkutan. Selain itu, pemahaman akan konsep fungsi ini sangat penting dalam mempelajari disiplin ilmu ekonomi, mengingat telaah-telaah ekonomi banyak bekerja dengan konsep fungsi.

Dalam paket 1 ini, mahasiswa akan mengkaji pengertian fungsi, mempelajari unsur-unsur yang ada dalam fungsi, dan mengidentifikasi jenis-jenis fungsi, apakah termasuk fungsi linier, fungsi kuadrat, fungsi pangkat maupun fungsi logaritma. Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait definisi fungsi yang dipahami selama ini; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh kasus ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Kemampuan memahami konsep fungsi dalam kajian matematika.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan definisi fungsi dalam kajian matematika
2. Menjelaskan unsur-unsur fungsi dalam kajian matematika
3. Mengidentifikasi jenis-jenis fungsi dalam kajian matematika
4. Menganalisis kasus-kasus yang menerapkan konsep fungsi dalam kajian matematika
5. Menggambar fungsi dalam kajian matematika

Waktu

2x50 menit

Materi Pokok

1. Definisi fungsi dalam kajian matematika
2. Unsur-unsur fungsi dalam kajian matematika
3. Jenis-jenis fungsi dan gambarnya dalam kajian matematika

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (10 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep fungsi
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep fungsi

Kegiatan Inti (70 menit)

1. Penjelasan mengenai konsep fungsi, unsur fungsi, dan gambar fungsi dalam kajian matematika
2. Mahasiswa dibagi dalam 4 kelompok
3. Masing-masing kelompok mendiskusikan sub tema:
   Kelompok 1: Analisis kasus ekonomi yang menerapkan konsep fungsi linier dan menggambar fungsinya

Kelompok 2: Analisis kasus ekonomi yang menerapkan konsep fungsi kuadrat dan menggambar fungsinya

Kelompok 3: Analisis kasus ekonomi yang menerapkan konsep fungsi eksponensial dan menggambar fungsinya

Kelompok 4: Analisis kasus ekonomi yang menerapkan konsep fungsi logaritma dan menggambar fungsinya

4. Presentasi hasil diskusi dari masing-masing kelompok
5. Selesai presentasi setiap kelompok, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan dan *feedback* hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi
8. Penguatan materi perkuliahan oleh dosen
9. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan

Analisis kasus ekonomi dengan memberikan ilustrasi kasus berupa gambar kegiatan ekonomi pada tiap-tiap kelompok. Masing-masing kelompok mengilustrasi dan menganalisis kasus kemudian menggambar bentuk fungsi sesuai kasus yang diberikan.

Tujuan

Mahasiswa dapat menganalisis kasus ekonomi dan menggambar fungsinya sesuai kasus yang diberikan untuk membangun pemahaman tentang konsep fungsi dalam kajian matematika.

Bahan dan Alat

Kertas plano, spidol berwarna, dan solasi

Langkah-langkah kegiatan

1. Pilihlah seorang pemandu kerja kelompok dan penulis konsep hasil kerja!
2. Diskusikan materi yang telah ditentukan dengan anggota kelompok!
3. Tuliskan hasil diskusi dalam bentuk Peta Konsep
4. Tempelkan hasil kerja kelompok di papan tulis
5. Pilihlah satu anggota kelompok untuk presentasi
6. Presentasikan hasil kerja kelompok secara bergiliran dengan waktu masing-masing 5 menit. Kelompok lain mengamati dan menilai sesuai dengan ketentuan dalam tabel di bawah!
7. Berikan tanggapan/ klarifikasi dari presentasi
8. Jumlahkan nilai masing-masing kelompok, dan tentukan pemenangnya!

Tabel 5.1: Daftar Nilai Pembuatan *Mind Map*

KELOMPOK	NILAI				JUMLAH
I					
II					
III					
IV					

Keterangan Nilai:

90 = sangat baik 80 = baik 70 = cukup 60 = kurang

Uraian Materi

FUNGSI DALAM KAJIAN MATEMATIKA

Definisi Fungsi dalam kajian matematika

- Suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hub. fungsional) antara suatu variabel dengan variabel lain.

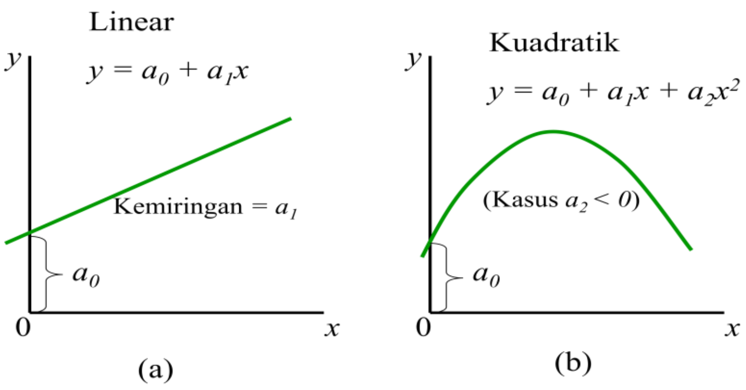
- $y = a + bx$
  y menunjukkan *dependent variable*
  a merupakan konstanta
  b koefisien variabel x
  x adalah *independent variable*
- TC = FC + VC
- TC = 6000 + 2000x
  TC = total cost
  6000 = biaya tetap (*fixed cost*)
  2000 = biaya variabel rata-rata tiap unit (*variabel cost*)
  x = banyaknya barang yang diproduksi

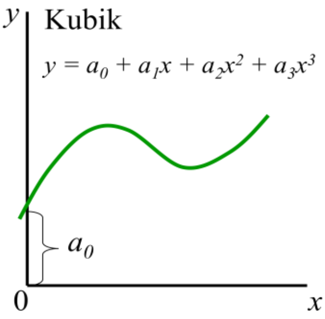
Jenis-Jenis Fungsi dalam Kajian Matematika

- Fungsi polinom : fungsi yang mengandung banyak suku (polinom) dalam variabel bebasnya.
  $\boldsymbol{y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n}$
- Fungsi Linear : fungsi polinom khusus yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat satu (fungsi berderajat satu).
  $\boldsymbol{y = a_0 + a_1x \qquad a1 \neq 0}$
- Fungsi Kuadrat : fungsi polinom yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat dua, sering juga disebut fungsi berderajat dua.
  $\boldsymbol{y = a_0 + a_1x + a_2x^2} \qquad a_2 \neq 0$
- Fungsi berderajat n : fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat *n* (*n* = bilangan nyata).
  $\boldsymbol{y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}$
  $a_n \neq 0$

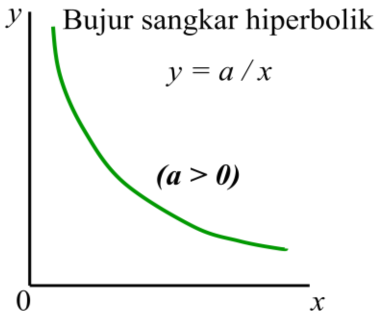
- <u>Fungsi Pangkat</u> : fungsi yang variabel bebasnya berpangkat sebuah bilangan nyata bukan nol.
  $y = x^n$ *n = bilangan nyata bukan nol.*
- <u>Fungsi eksponensial</u> : fungsi yang variabel bebasnya merupakan pangkat dari suatu konstanta bukan nol.
  $y = n^x \quad n > 0$
- <u>Fungsi logaritmik</u> : fungsi balik (inverse) dari fungsi eksponensial, variabel bebasnya merupakan bilangan logaritmik.
  $y = {}^n\log x$
- <u>Fungsi trigonometrik dan fungsi hiperbolik</u> : fungsi yang variabel bebasnya merupakan bilangan-bilangan goneometrik.
  persamaan trigonometrik $y = \sin x$
  persamaan hiperbolik $y = \arccos x$

Gambar Fungsi



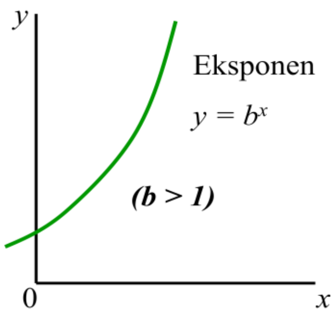


(c)

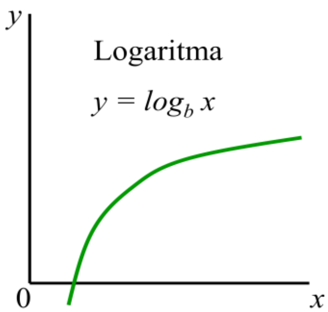


(d)

\\\



(e)



(f)

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Definisi fungsi dalam kajian matematika
   bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hub. fungsional) antara suatu variabel dengan variabel lain.
2. Bentuk umum fungsi dalam kajian matematika
   - $y = a + bx$
     y menunjukkan *dependent variable*
     a merupakan konstanta
     b koefisien variabel x
     x adalah *independent variable*

3. Jenis-jenis Fungsi dalam kajian matematika

Jenis Fungsi	Bentuk Persamaan
Fungsi polinom	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$
Fungsi Linear	$y = a_0 + a_1x \qquad a1 \neq 0$
Fungsi Kuadrat	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \qquad a_2 \neq 0$
Fungsi berderajat n	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \qquad a_n \neq 0$
Fungsi Pangkat	$y = x^n$ *n = bilangan nyata bukan nol.*
Fungsi eksponensial	$y = n^x \quad n > 0$
Fungsi logaritmik	$y = {}^n\log x$
Fungsi trigonometrik	$y = \sin x$
Fungsi hiperbolik	$y = \arccos x$

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Jelaskan definisi fungsi dalam kajian matematika!
2. Sebutkan unsur-unsur fungsi dalam kajian matematika!
3. Sebutkan jenis-jenis fungsi, bentuk persamaannya dan gambarkan fungsinya!

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 2
FUNGSI LINIER

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep fungsi linier. Kajian dalam paket ini meliputi bentuk umum fungsi linier, pembentukan persamaan linier, hubungan dua garis lurus, dan pencarian akar-akar persamaan. Pemahaman akan konsep fungsi linier ini sangat penting, mengingat di antara hubungan fungsional yang ada, hubungan linier merupakan bentuk yang paling dasar dan sering digunakan dalam analisis ekonomi.

Dalam paket 2 ini, mahasiswa akan mempelajari bentuk umum fungsi linier, mengkaji pembentukan persamaan linier, mempelajari hubungan yang terjadi jika terdapat dua garis lurus dalam satu sumbu silang, dan mencari akar-akar persamaan dengan substitusi, eliminasi, maupun grafik. Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait definisi fungsi yang telah dipelajari pada paket 1, dihubungkan juga dengan penggunaannya dalam ekonomi; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh soal dan aplikasinya dalam ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas, spidol dan penggaris.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Mahasiswa memahami konsep fungsi linier dan aplikasinya dalam ekonomi

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menyebutkan bentuk umum fungsi linier
2. Menjelaskan metode pembentukan persamaan linier
3. Mengkategorikan hubungan dua garis lurus
4. Melakukan pencarian akar-akar persamaan.
5. Menggambar grafik fungsi linier

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Bentuk umum fungsi linier
2. Metode pembentukan persamaan linier
3. Hubungan dua garis lurus
4. Metode pencarian akar-akar persamaan
6. Langkah-langkah menggambar fungsi linier

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (15 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan mahasiswa terhadap konsep fungsi linier serta bentuk persamaannya
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep fungsi linier

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Penjelasan mengenai konsep fungsi linier, metode pembentukan persamaan linier, hubungan dua garis, dan metode pencarian akar-akar persamaan

2. Membagi mahasiswa dalam 5 kelompok
3. Masing-masing kelompok diberikan tugas menyelesaikan soal terkait metode pembentukan persamaan linier, hubungan dua garis, dan metode pencarian akar-akar persamaan dengan soal yang berbeda
4. Masing-masing kelompok membahas dan menyelesaikan soal yang diberikan kemudian menyerahkan hasil penyelesaian soal kepada dosen
5. Presentasi hasil diskusi terhadap kelompok terpilih
6. Selesai presentasi, kelompok yang tidak presentasi memberikan klarifikasi
7. Penguatan hasil presentasi oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Membuat laporan hasil diskusi kelompok terhadap penyelesaian soal yang diberikan.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep fungsi linier dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

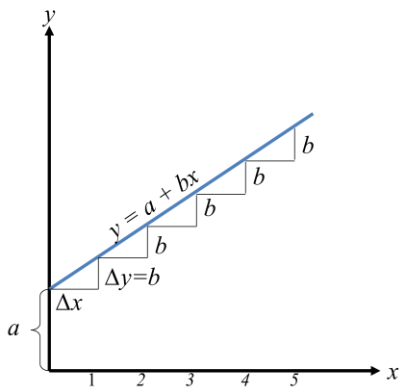
1. Bahas soal-soal yang diberikan dengan kelompok masing-masing
2. Catat dan laporkan hasil penyelesaian soal sesuai diskusi kelompok kepada dosen di lembaran kertas

Uraian Materi

FUNGSI LINIER

A. Bentuk Umum Fungsi Linier

Suatu fungsi linear dapat digambarkan grafiknya dalam kordinat kartesian yang memiliki sumbu horisontal sebagai sb-x dan sumbu vertikal sebagai sb-y.



Bentuk umum fungsi linier yaitu $y = a + bx$

a adalah titik potong pada sumbu y

b adalah gradien / kemiringan garis

dirumuskan $b = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

B. Pembentukan Persamaan Linier

Pada prinsipnya persamaan linear bisa dibentuk berdasarkan beberapa cara yaitu: dwi- koordinat, koordinat- gradien, penggal- gradien, dan dwi- penggal.

1. Cara Dwi Koordinat

Persamaan garis yang melalui dua koordinat, misalkan A (x_1, y_1) dan B(y_1, y_2) ada pada suatu garis lurus, maka persamaan garis yang melalui dua koordinat tersebut adalah :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \rightarrow \mathbf{y = b(x - x_1) + y_1}$$

2. Cara Koordinat- Gradien

Dari sebuah titik dan suatu gradien dapat dibentuk sebuah persamaan linear yang memenuhi titik dan gradien dengan persamaan sebagai berikut tersebut. $Y-Y_1=b(X-X_1)$

Contoh

Apabila diketahui titik A(2,3) dan gradien garisnya 0,5, maka persamaan linear yang dipenuhi adalah

$Y-Y_1=b(X-X_1)$

Y-3=0,5(X-2)

Y-3=0,5X-1

Y=2+0,5X

3. Cara Penggal gradien

Sebuah persamaan linear dapat juga dibentuk jika diketahui titik penggalnya pada salah satu sumbu dan gradien garis yang memenuhi persamaan tersebut

Y=a+bX

a= penggal; b=gradient

Contoh

Apabila diketahui penggal dan gradien garis Y=f(X) masing-masing adalah 4 dan 0,8, maka persamaan linearnya

Y = 4 + 0,8X

4. Cara Dwi Penggal

Persamaan linear juga dapat dibentuk apabila diketahui penggal garis tersebut pada masing masing sumbu. Apabila a dan c merupakan nilai penggal pada masing masing sumbu vertikal dan horizontal dari sebuah garis lurus, maka persamaan garisnya:

a = penggal vertikal;
b = penggal horizontal

$$y = a - \frac{a}{c}x$$

Contoh: Penggal sebuah garispada sumbu vertikal dan horizontal masing-masing 3 dan -6, maka persamaan linear yang memenuhinya adalah:

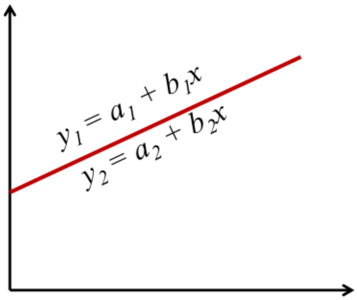
$$y = a - \frac{a}{c}x$$

y=3+0,5X

C. Hubungan Dua Garis Lurus

Dalam sistem sepasang sumbu silang, dua buah garis lurus mempunyai empat macam kemungkinan bentuk hubungan yang :

- berimpit,
- sejajar,
- berpotongan
- dan tegak lurus.

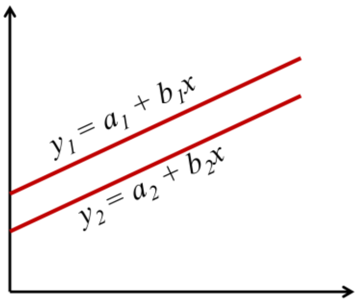


Berimpit :

$y_1 = ny_2$

$a_1 = na_2$

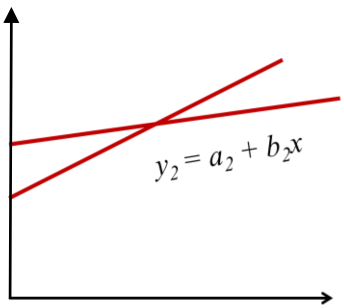
$b_1 = nb_2$



Sejajar :

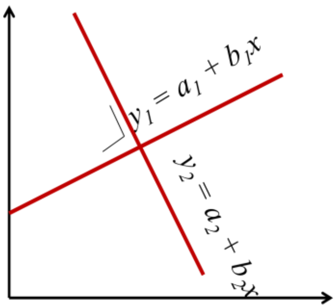
$a_1 \neq a_2$

$b_1 = b_2$



Berpotongan :

$b_1 \neq b_2$



Tegak Lurus :

$b_1 = - 1/b_2$

D. Pencarian Akar-Akar Persamaan

Penyelesaian persamaan- persamaan linear secara serempak (simultaneously), dapat dilakukan dengan cara substitusi maupun eliminasi

1. Substitusi

Dua persamaan dengan dua bilangan tertentu dapat diselesaikan dengan cara menyelesaikan terlebih dahulu sebuah persamaan untuk salah satu bilangan tertentu, kemudian mensubstitusikannya ke dalam persamaan yang lain.

Contoh : Carilah nilai variabel- variabel x dan y dari dua persamaan berikut:

2x + 3y = 21 dan x + 4y = 23

untuk variabel x, diperoleh x = 23-4y

2x + 3y = 21

2(23 – 4y) + 3y = 21

46 – 8y + 3y = 21

46 – 5y = 21, 25 = 5y, y = 5

Dengan mensubstitusikan nilai variabel maka didapatkan

2X +3Y =21

2X +3(5) =21

2X = 6

X = 3

Ditemukan akar-akar persamaan x=3 dan y=5

2. Eliminasi

Dua persamaan dengan dua bilangan tertentu dapat diselesaikan dengan cara menghilangkan untuk sementara (mengeliminasi) salah satu bilangan tertentu yang ada, sehingga dapat dihitung nilai dari bilangan yang lain.

Contoh: Carilah nilai variabel- variabel x dan y dari dua persamaan berikut:

$$\begin{array}{r|c|l} 2x+3y=21 & \times 1 & 2x+3y=21 \\ x+4y=23 & \times 2 & 2x+8y=46 \end{array}$$

$$-5y=-25, \quad y=5$$

Kemudian Nilai variabel y = 5 disubstitusikan
X + 4Y =23
X + 4(5) =23
X = 3
Ditemukan akar-akar persamaan x=3 dan y=5

E. Metode Menggambar Grafik Fungsi Linier

Metode dalam menggambar grafik antara lain dengan cara daftar dan matematis.

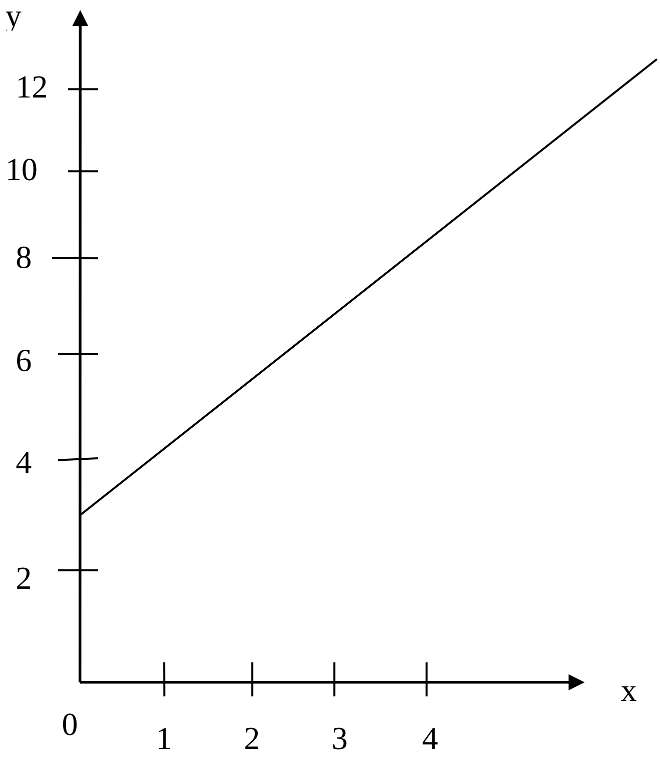
1. Cara Daftar

Digunakan untuk melihat perubahan nilai angka dari peubah bebas dan peubah tergantungnya. Contoh :

y = 3 + 2x

Langkahnya adalah dimasukkan satu per satu pada variabel x dan kemudian menuliskan hasilnya pada variabel y sebagaimana pada kotak di bawah ini

X	0	1	2	3	4
Y	3	5	7	9	11



2. Cara Matematis

Cara matematis ini dilakukan dengan cara mencari ciri matematis dari persamaan yang bersangkutan yaitu titik potong pada sumbu x dan sumbu y. Mencari titik potong Pada sumbu y maka x=0. Sebaliknya mencari titik potong pada sumbu x maka y=0.

Contoh: Gambarlah grafik persamaan Y = 2x + 10

Penyelesaian:

- Titik potong sumbu y apabila x = 0 maka y = 2 (0) + 10

  = 10

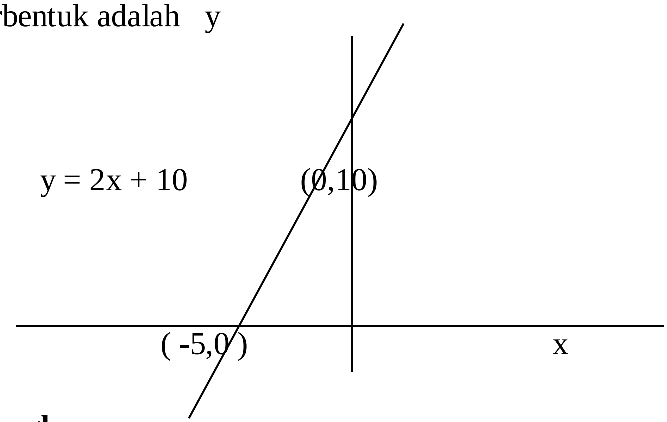
Sehingga titik potong pada sumbu y = (0,10)

- Titik potong sumbu x apabila y = 0 maka 0 = 2x + 10

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

sehingga titik potong pada sumbu x = (-5,0). Gambar yang terbentuk adalah y



Rangkuman

1. Bentuk umum fungsi linier yaitu $y = a + bx$
   a adalah titik potong pada sumbu y
   b adalah gradien / kemiringan garis
   dirumuskan $b = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
   - Persamaan linear bisa dibentuk berdasarkan empat macam cara yaitu:
     - cara dwi- koordinat
     - cara koordinat- gradien
     - cara penggal- gradien
     - cara dwi- penggal
2. Dalam sistem sepasang sumbu silang, dua buah garis lurus mempunyai empat macam kemungkinan bentuk hubungan yang :

- berimpit,
- sejajar,
- berpotongan
- dan tegak lurus.

3. Terdapat dua Metode Menggambar Grafik Fungsi Linier

- Cara daftar dan cara matematis.

  Cara daftar digunakan untuk melihat perubahan nilai angka dari peubah bebas dan peubah tergantungnya. Dilakukan dengan memasukkan nilai sembarang x ke dalam persamaan linier.
- Cara matematis dengan cara mencari ciri matematis dari persamaan yang bersangkutan, yaitu titik potong sumbu y apabila x = 0 dan titik potong sumbu x apabila y=0

Latihan

1. Tentukan persamaan garis yang melalui titik koordinat (4,3) dan (-2, 5) serta gambarkan garisnya
2. Tentukan bentuk hubungan dua garis lurus dari :

   (a) Persamaan $2x + 6y - 4 = 0$ dan $-3x + y - 4 = 0$

   (b) Persamaan $2x + y + 4 = 0$ dan $2x + 6y - 4 = 0$

   (c) Persamaan $2x + 6y - 4 = 0$ dan $4x + 12y - 8 = 0$

   (d) Persamaan $2x + 6y - 4 = 0$ dan $x + 3y - 9 = 0$
3. Tentukan persamaan garis melalui titik koordinat (4,1) dan gradien -3 serta gambarkan garisnya
4. Tentukanlah koordinat titik potong dua persamaan berikut :

   (a) $y = -x + 3$ dan $y = 3x – 5$

   (b) $3x - 4y + 6 = 0$ dan $x - 2y - 3 = 0$

   (c) $2x - 3y + 3 = 0$ dan $4x - 6y + 12 = 0$

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 3
APLIKASI FUNGSI LINIER DALAM EKONOMI

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada aplikasi konsep fungsi linier dalam ekonomi. Kajian dalam paket ini meliputi aplikasi konsep fungsi dalam fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar. Disamping itu, dalam paket ini mahasiswa juga akan mengkaji konsep fungsi linier yang melandasi masing-masing konsep ekonomi menyangkut konsep fungsi permintaan, penawaran, dan keseimbangan pasar. Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait konsep fungsi linier yang dipahami selama ini; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh kasus ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Kemampuan memahami aplikasi konsep fungsi linier dalam ekonomi

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan konsep fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar
2. Menjelaskan karakteristik grafik fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar berdasarkan konsep fungsi linier
3. Menyelesaikan kasus-kasus ekonomi yang menerapkan konsep fungsi linier
4. Menggambar fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Konsep fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar
2. Metode menggambar fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (10 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Review pengetahuan mahasiswa terhadap konsep fungsi linier dan aplikasinya
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep fungsi linier dan aplikasinya

Kegiatan Inti (70 menit)

1. Penjelasan mengenai aplikasi fungsi linier dalam ekonomi, terutama yang diaplikasikan pada konsep fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar.
2. Mahasiswa berkelompok sesuai kelompok masing-masing. Satu kelas terdapat lima kelompok.
3. Dua kelompok bertugas presentasi makalah yang ditugaskan. Tiga kelompok lain menyimak dan membahas.
4. Masing-masing kelompok mendiskusikan sub tema:
   Kelompok 1: Fungsi Permintaan dan Penawaran
   Kelompok 2: Keseimbangan Pasar
   Selesai presentasi setiap kelompok, kelompok lain memberikan klarifikasi
5. Penguatan dan *feedback* hasil diskusi dari dosen
6. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi
7. Penguatan materi perkuliahan oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.
2. Memberi tugas latihan

Lembar Kegiatan

Setiap kelompok membuat laporan hasil presentasi kelompok terhadap materi yang dibahas.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep aplikasi fungsi linier dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Diskusikan dan bahas materi yang telah dipresentasikan kelompok presentasi!
2. Catat dan laporkan hasil diskusi di lembaran kertas
3. Berikan penilaian terhadap kelompok presentasi dengan draft penilaian sebagai berikut

Tabel 5.1: Daftar Nilai Pembuatan Presentasi

Klp	Penguasaan Materi	Kekompakan	Makalah	Powerpoint	Performance
I					
II					

Keterangan Nilai:

90 = sangat baik 80 = baik 70 = cukup 60 = kurang

Uraian Materi

APLIKASI FUNGSI LINIER DALAM MATEMATIKA

A. FUNGSI PERMINTAAN

Fungsi permintaan didefinisikan sebagai hubungan antara jumlah barang/jasa yang diminta dengan variabel lain. Variabel lain tersebut bisa berupa harga barang, pendapatan, selera, mode, dan lain-lain.

Secara umum persamaannya adalah $Q_{dx,t} = f\ (P_{x,t},\ P_{y,t},\ Y_{t},\ P^{e}_{X,t+1}, S_{t})$

Dimana :

$Q_{dx,t}$ = Jumlah produk X yang dibeli/diminta oleh konsumsi dalam periode t.

$P_{x,t}$ = Harga produk X dalam periode t.

$P_{y,t}$ = Harga produk yang saling berhubungan dalam periode t.

Y_t = Pendapatan konsumen dalam periode t.

$P^e_{x,t+1}$ = Harga produk X yang diharapkan dalam periode mendatang t + 1.

S_t = Selera dari konsumen pada periode t.

Bila fungsi permintaan ini ditranformasikan kedalam bentuk persamaan linier dengan asumsi keadaan adalah ceteris paribus, maka bentuk umumnya adalah $Q_x = a - bP_x$

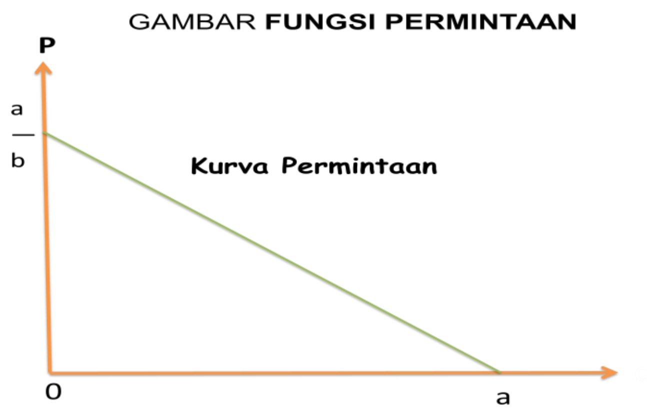
Dimana :

Q_x = Jumlah produk X yang diminta

P_x = Harga produk X

a dan b = Parameter

Sesuai dengan hukum permintaan, maka suatu fungsi permintaan dinyatakan sebagai Qd = f(P) dan kurva permintaannya adalah sebagai berikut:



Contoh

1. Duapuluh unit radio akan terjual bila harganya Rp 60 (dalam ribuan), sedangkan bila harganya naik menjadi Rp 90 maka radio yang terjual berjumlah 10 unit. Tunjukkan fungsi permintaannya !

Jawab :

$P_1 = 60 \qquad Q_1 = 20$

$P_2 = 90 \qquad Q_2 = 10$

$$P - P_1 = \frac{P_2 - P_1}{Q_2 - Q_1}(Q - Q_1)$$

$$P - 60 = \frac{90 - 60}{10 - 20}(Q - 20)$$

$$P - 60 = \frac{30}{-10}(Q - 20)$$

$$P - 60 = -3Q + 60$$

$$P = -3Q + 120$$

Jadi persamaan fungsi permintaannya P = -3Q + 120

Jika fungsi tersebut digambarkan, maka langkahnya sebagaimana menggambar fungsi linier pada bab sebelumnya.

Pertama: Mencari titik potong pd sumbu P maka Q=0

P = -3Q + 120

P=-3(0) +120

P=120. Sehingga titiknya adalah (120, 0)

Kedua: Mencari titik potong pd sumbu Q maka P = 0

P = -3Q + 120

0=-3Q +120

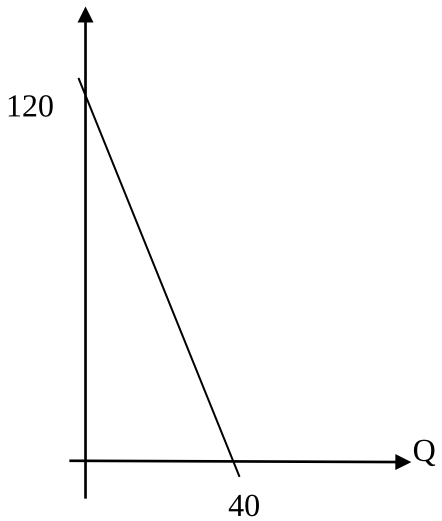
3Q=120. Sehingga titiknya adalah (120, 0)

Q = 120 :3

Q = 40. Sehingga titiknya adalah (0,40)

Ketiga: Membuat garis sumbu silangnya

Q



B. FUNGSI PENAWARAN

Fungsi penawaran ialah fungsi yang menyatakan hubungan antara jumlah barang/jasa yang ditawarkan dengan variabel lain. Variabel lain tersebut bisa berupa harga barang, teknologi yang tersedia, harga faktor-faktor produksi, harga produk lain, harapan produsen terhadap harga produk, dan lain-lain.

Secara umum persamaannya adalah $Q_{sx,t} = f(P_{x,t}\ ,\ T_t\ ,\ P_{F,t}\ ,\ P_{R,t}\ ,\ P^e_{x,t+1})$. Dimana

$Q_{sx,t}$ = jumlah produk X yang ditawarkan oleh produsen dalam periode t.

$P_{x,t}$ = harga produk X dalam periode t

T = Teknologi yang tersedia dalam periode t

$P_{F,t}$ = Harga faktor-faktor produksi dalam periode t

$P_{R,t}$ = harga produk lain yang berhubungan dalam periode t

$P^e_{x,t+1}$ = harapan produsen terhadap harga produk dalam periode t + 1

Bila fungsi penawaran ini ditranformasikan kedalam bentuk persamaan linier dengan asumsi keadaan adalah ceteris paribus (variabel lain dianggap tetap), maka bentuk umumnya adalah $Q_{sx} = g\ (P_x)$.

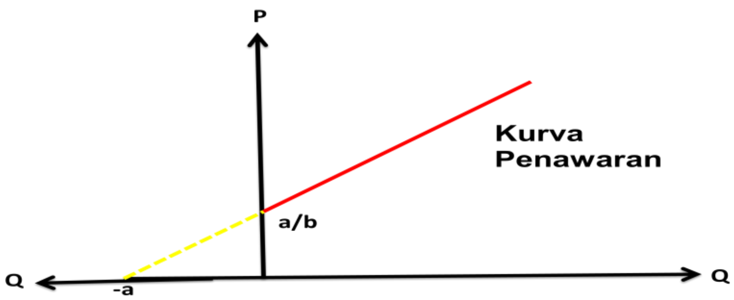
Dimana

Q_{sx} = jumlah produk X yang ditawarkan oleh produsen

P_x = Harga produk X

Q_{sx} = a + bP

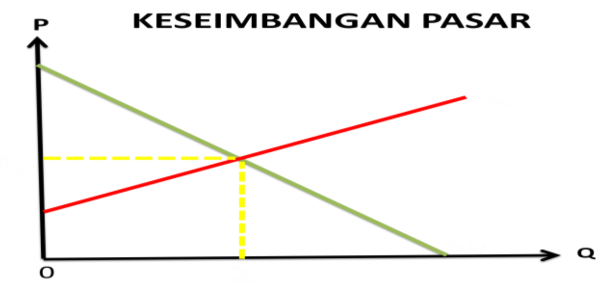
- Kurva penawaran digambarkan sebagai berikut:



C. KESEIMBANGAN PASAR (*MARKET EQUILIBRIUM*)

Keseimbangan pasar suatu barang menunjukkan tingkat harga yang mengakibatkan jumlah permintaan sama dengan jumlah penawarannya (Q_d = Q_s).

Secara grafik, keseimbangan pasar tercapai pada titik potong kurva permintaan dan kurva penawarannya.Pada titik E tercapai $Q_d = Q_s \rightarrow Q_e$



Contoh :

Jika fungsi permintaan dan penawaran dari suatu barang ditunjukkan oleh :

$Q_d = 6 - 0{,}75$ P

$Q_s = -5 + 2P$

a) Berapa harga dan jumlah keseimbangan pasar?

b) Tunjukkanlah secara geometri keseimbangan pasar tersebut!

Penyelesaian:

a) Syarat keseimbangan $Q_d = Q_s$

Bila $Q_d = Q_{s,}$ maka $6 – 0{,}75P = -5 + 2P$

$-2{,}75P = -11$

$P = 4$

Untuk memperoleh nilai Q substitusikan nilai P = 4 kedalam salah satu persamaan permintaan atau penawaran sehingga,

$Q = 6 – 0{,}75\ (4)$

$Q = 6 – 3$

$Q = 3$

Jadi, harga dan jumlah keseimbangan E(3,4).

c) Menggambarkan keseimbangan pasar :

- Untuk fungsi permintaan $Q = 6 – 0{,}75\ P$

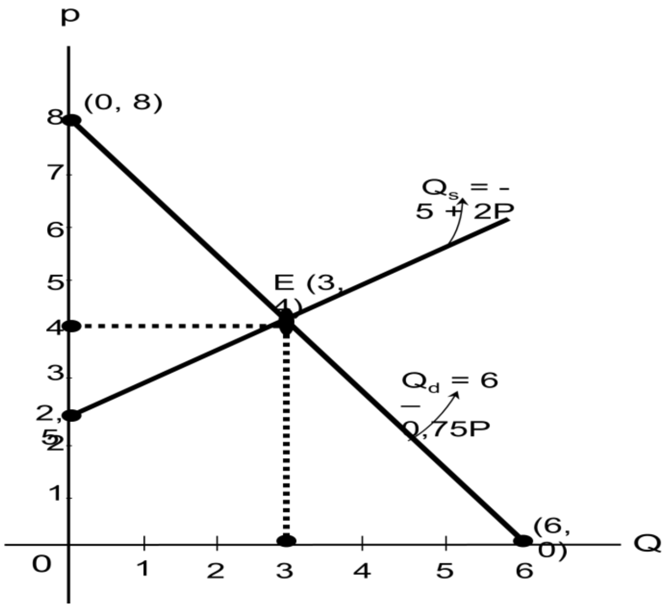
Jika P = 0, maka Q = 6, sehingga titik potong dengan sumbu Q adalah (6,0)

Jika Q = 0, maka P = 8, sehingga titik potong dengan sumbu P adalah (0,8)

- Untuk fungsi permintaan $Q = -5 + 2P$

Jika P = 0, maka Q= -5, sehingga titik potong dengan sumbu Q adalah (-5,0)

Jika Q= 0, maka P= 2,5 sehingga titik potong dengan sumbu P adalah (0,5/2)



Contoh 2:

Fungsi permintaan dan penawaran ditunjukkan oleh persamaan :

$Q_D = 120 - 3P \qquad Q_S = -60 + 6P$

Berapa harga dan jumlah keseimbangannya?

Jawab :

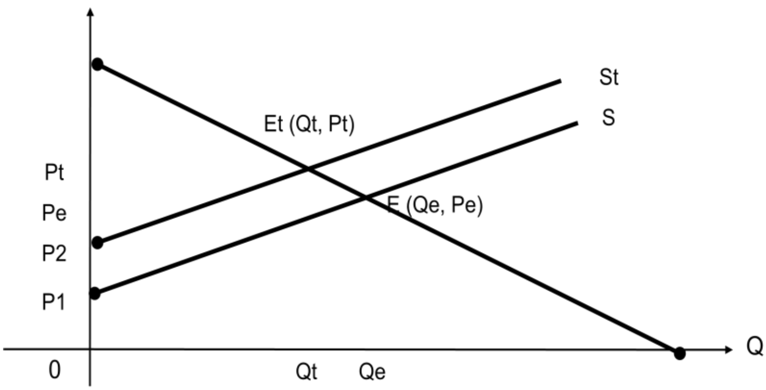
$$Q_D = Q_S$$
$$120 - 3P = -60 + 6P\backslash$$
$$120 + 60 = 6P + 3P$$
$$180 = 9P$$
$$P = 20$$
$$Q = 120 - 3(20)$$
$$Q = 120 - 60$$
$$Q = 60$$

Jadi keseimbangan terjadi pada saat harga Rp 20 dan kuantitas sebanyak 60 unit.

D. Keseimbangan Pasar Setelah Pajak dan Subsidi

Adanya pajak dan subsidi hanya akan menggeser fungsi penawaran dan tidak berpengaruh kepada fungsi permintaan. Pajak akan menggeser kurva penawaran ke atas, sedangkan subsidi akan menggeser kurva penawaran ke bawah.

Jika fungsi permintaan adalah, P = f(Q) dan fungsi Penawaran adalah, P = g(Q) maka jika dikenakan pajak, maka fungsi permintaan P = f(Q) dan fungsi Penawaran adalah, $P_t = g(Q) + t$,



Contoh

Jika fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan oleh P = 15 – Q dan fungsi penawaran P = 0,5Q + 3. Terhadap Produk tersebut dikenakan pajak oleh Pemerintah sebesar Rp 3 perunit.

(a) Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah kena pajak?

(b) Berapa besar penerimaan pajak total oleh Pemerintah?

(c) Berapa besar pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen?

(d) Gambarkan harga dan jumlah keseimbangan sebelum dan setelah pajak dalam satu diagram!

Penyelesaian

(a) $P_d = P_s$, maka $15 - Q = 0{,}5Q + 3$

$-1{,}5Q = -12$

$Q = 8$

$P = 15 - 8$

$P = 7$

Jadi, keseimbangan pasar sebelum kena pajak E (Q,P), E(8, 7)

(b) Keseimbangan setelah pajak

Permintaan : $P_d = 15 - Q$

Penawaran setelah pajak : $P_{st} = 0{,}5Q + 3 + 3$

$P_{st} = 0{,}5Q + 6$

Jika $P_d = P_{st}$, maka $15 - Q = 0{,}5Q + 6$

$-1{,}5Q = -9$

$Q = 6$

$P = 15 - 6$

$P = 9$

Jadi, keseimbangan pasar setelah kena pajak Et (Qt,Pt), Et (6, 9)

(c) Penerimaan pajak total oleh Pemerintah:

$T = t\,.Qt$

$T = (3)\,(6) = 18$

(d) Besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen:

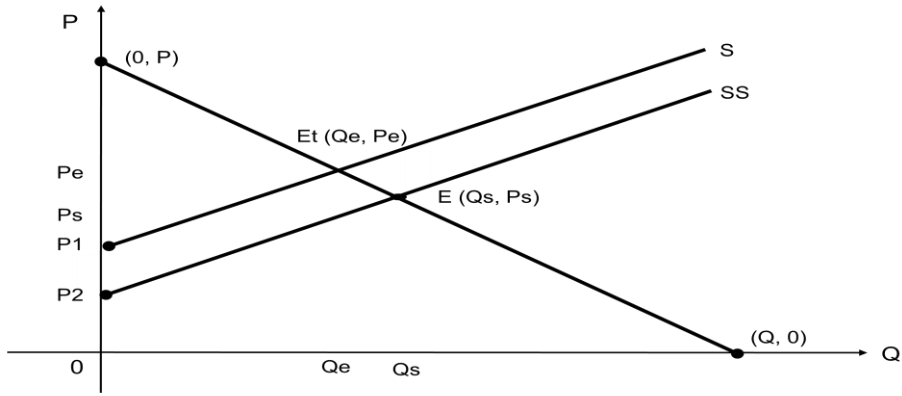
$T_{konsumen} = (Pt - P).Qt$

$= (9 - 7)(6) = 12$

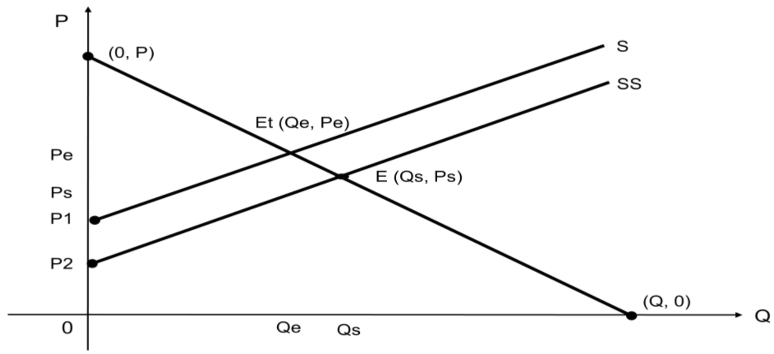
(e) Besarnya pajak yang ditanggung oleh produsen:

$T_{produsen} = T - T_{konsumen}$

$= 18 - 12 = 6$



Selanjutnya jika fungsi permintaan adalah, P = f(Q) dan fungsi Penawaran adalah, P = g(Q) maka jika dikenakan subsidi fungsi permintaan P = f(Q) dan fungsi Penawaran adalah, P_t = g(Q) - s,



Contoh

Fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan oleh P = 15 – Q dan fungsi penawaran P = 0,5Q + 3. Jika pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp. 1,5 per unit produk, (a) berapakah harga dan jumlah keseimbangan sebelum dan sesudah subsidi? (b) berapa besar subsidi yang diberikan oleh Pemerintah? (c) berapa besar subsidi yang dinikmati oleh konsumen dan produsen? (d) Gambarkanlah dalam satu diagram!

Penyelesaian:

a) Keseimbangan pasar sebelum subsidi adalah P = 7 dan Q = 8, E(Q,P), E(8,7) (lihat penyelesaian contoh sebelumnya)

Fungsi penawaran sebelum subsidi: $P_s = 0{,}5Q + 3$

Fungsi penawaran setelah subsidi: $P_{ss} = 0{,}5Q + 3 – 1{,}5$

$= 0{,}5Q + 1{,}5$

Jika $P_d = P_{ss}$, maka $15 – Q = 0{,}5Q + 1{,}5$

$-1{,}5Q = -13{,}5$

$Q = 9$

$P = 15 – 9 = 6$

Jadi, keseimbangan setelah subsidi Es (Qs,Ps), Es (9,6)

b) Besarnya subsidi yang diberikan oleh Pemerintah:

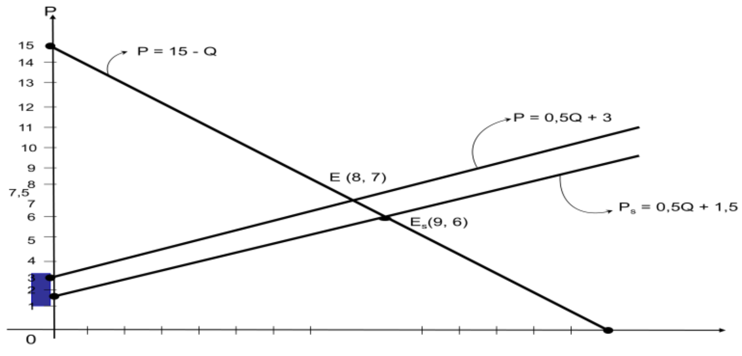
S = s. Qs = (1,5)(9) = 13,5

c)Besarnya subsidi yang dinikmati oleh konsumen adalah :

S konsumen = (P- Ps) Qs = (7 – 6)(9) = 9

Besarnya subsidi yang dinikmati oleh konsumen adalah :

S produsen = S – S konsumen = (13,5 – 9) = 4,5



Adanya pajak akan menaikkan harga barang, sedangkan adanya subsidi justru akan menurunkan harga barang tersebut.

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

- Bentuk umum fungsi permintaan adalah,

  $Q_x = a - bP_x$

  Dimana Q_x = Jumlah produk X yang diminta

  P_x = Harga produk X

  a dan b = Parameter

- Bentuk umum fungsi penawaran adalah

  $Q_{sx} = g(P_x)$

  $Q_{sx} = a + bP$

  Dimana Q_{sx} = jumlah produk X yang ditawarkan oleh produsen

  P_x = Harga produk X

- Keseimbangan pasar suatu barang menunjukkan tingkat harga yang mengakibatkan jumlah permintaan sama dengan jumlah penawarannya ($Q_d = Q_s$).

- Kurva Keseimbangan pasar dapat berubah apabila dikenakan pajak dan subsidi. Pajak dan subsidi hanya akan menggeser fungsi penawaran dan tidak berpengaruh kepada fungsi permintaan. Pajak akan menggeser kurva penawaran ke atas, sedangkan subsidi akan menggeser kurva penawaran ke bawah.

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Sebutkankan bentuk umum fungsi permintaan dan gambarkan fungsinya!
2. Sebutkan bentuk umum fungsi penawaran dan gambarkan fungsinya!
3. Jelaskan konsep keseimbangan pasar dan gambarkan fungsinya!
4. Fungsi permintaan suatu barang adalah P=-2Q +10 dan fungsi penawarannya adalah P=1+3/2Q. Carilah titik keseimbangan pasar, kemudian gambarkan grafik fungsi tersebut.
5. Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah Q=16-2P dan fungsi penawarannya adalah P=3+1/2Q. Carilah titik keseimbangan pasar, kemudian gambarkan grafik fungsi tersebut

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 4
FUNGSI KUADRAT

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep fungsi kuadrat. Kajian dalam paket ini meliputi bentuk umum fungsi kuadrat, pencarian akar-akar persamaan kuadrat, dan penggambaran fungsi kuadrat. Pemahaman akan konsep fungsi kuadrat sangat penting, mengingat selain fungsi linier, hubungan fungsional yang sering digunakan dalam analisis ekonomi juga berbentuk fungsi kuadrat.

Dalam paket 4 ini, mahasiswa akan mempelajari bentuk umum fungsi kuadrat, pencarian akar-akar persamaan kuadrat, dan penggambaran fungsi kuadrat. Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama; mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait definisi fungsi kuadrat yang telah dipelajari pada paket sebelumnya, dihubungkan juga dengan penggunaannya dalam ekonomi; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh soal dan aplikasinya dalam ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Mahasiswa memahami konsep fungsi kuadrat

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menyebutkan bentuk umum fungsi kuadrat
2. Melakukan pencarian akar-akar persamaan fungsi kuadrat.
3. Menggambar grafik fungsi kuadrat

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Bentuk umum fungsi kuadrat
2. Metode pencarian akar-akar persamaan kuadrat
3. Langkah-langkah menggambar fungsi kuadrat

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (15 menit)

1. Brainstorming pengetahuan mahasiswa terhadap konsep fungsi kuadrat serta bentuk persamaannya
2. Menjelaskan kompetensi dasar
3. Menjelaskan indikator
4. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
5. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep fungsi kuadrat

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Penjelasan mengenai metode bentuk umum fungsi kuadrat, metode pencarian akar-akar persamaan kuadrat, dan langkah-langkah menggambar fungsi kuadrat.
2. Membagi mahasiswa dalam 5 kelompok

3. Masing-masing kelompok diberikan tugas menyelesaikan soal terkait metode pembentukan persamaan linier, hubungan dua garis, dan metode pencarian akar-akar persamaan dengan soal yang berbeda
4. Masing-masing kelompok membahas dan menyelesaikan soal yang diberikan kemudian menyerahkan hasil penyelesaian soal kepada dosen
5. Presentasi hasil diskusi terhadap kelompok terpilih
6. Selesai presentasi, kelompok yang tidak presentasi memberikan klarifikasi
7. Penguatan hasil presentasi oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Membuat laporan hasil diskusi kelompok terhadap penyelesaian soal yang diberikan.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep fungsi kuadrat dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Bahas soal-soal yang diberikan dengan kelompok masing-masing

2. Laporkan hasil diskusi kelompok secara individu dalam selembar kertas

Uraian Materi

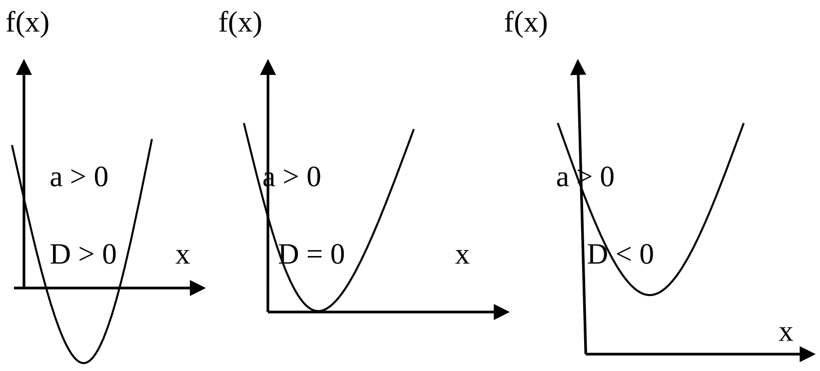
FUNGSI KUADRAT

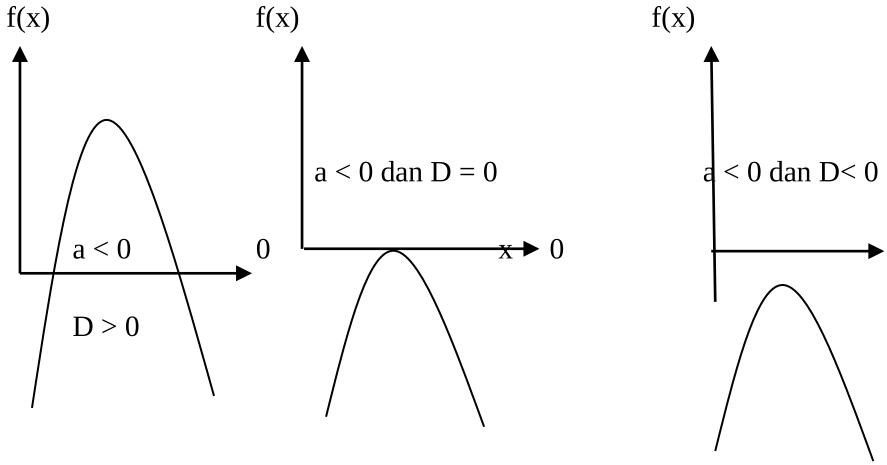
A. Konsep Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat merupakan fungsi dengan pangkat tertinggi variabelnya dua. Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$ atau $Y = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$**.** Bentuk garisnya melengkung dan hanya punya satu titik puncak. Sifat matematis dari persamaan kuadrat yang menentukan bentuk kurva parabolanya adalah koefisien a dan diskriminan
$D = b^2 - 4ac$.

Jika $a > 0$, maka kurva parabola terbuka ke atas, sedangkan jika $a < 0$, maka kurva parabolanya terbuka ke bawah. Jadi jika $a > 0$ akan ada titik ekstrim minimum dan jika $a < 0$ akan ada titik ekstrim maksimum.

Jika $D > 0$, maka kurva parabola memotong sumbu-x di dua titik, jika $D = 0$, maka kurva parabola akan memotong sumbu-x di satu titik, dan jika $D < 0$, maka kurva parabola tidak memotong sumbu-x.





B. Penggambaran Fungsi Kuadrat

Untuk menggambarkan kurva parabola suatu fungsi kuadrat dapat ditempuh dua cara, yaitu:

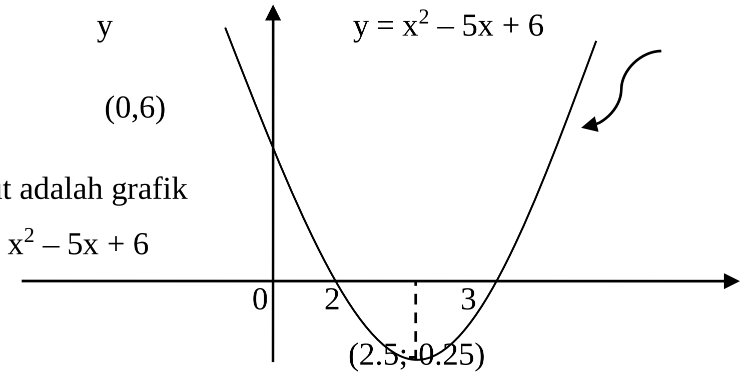
1. *Tracing process curve*, yaitu dengan menentukan lebih dulu nilai x, kemudian disubstitusikan ke dalam fungsinya sehingga diperoleh nilai y. Cara ini kurang efisien, karena diperlukan beberapa pasangan x dan y yang cukup banyak, paling sedikit 8 pasangan x dan y. Misalkan untuk menggambarkan kurva parabola dari fungsi kuadrat: $y = x^2 - 5x + 6$ digunakan pasangan x dan y sebagai berikut:

x	– 2	– 1	0	1	2.5	2	3	4	5
y	20	12	6	2	– 0.25	0	0	2	6

Sehingga bila koordinat (x,y) diplot ke dalam koordinat kartesian akan diperoleh kurva sebagai berikut:

Berikut adalah grafik

y= y = $x^2 - 5x + 6$



2. Dengan menggunakan sifat-sifat matematis fungsi kuadrat, sebagai berikut

   1) Tentukan tipot kurva dengan sb-y dengan memisalkan x = 0
   2) Tentukan tipot kurva dengan sb-x dengan memisalkan y = 0, sehingga $ax^2 + bx + c = 0$ akan memiliki tiga kemungkinan solusi, yaitu:
      - Bila diskriminan $D = b^2 - 4\ ac > 0$, maka akan terdapat dua tipot kurva dengan sb-x yang diperoleh dengan rumus berikut:

      $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

      - Bila D = 0, maka akan ada satu tipot kurva dengan sb-x, yaitu:

      $$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

      - Bila D < 0, maka tidak akan ada tipot kurva dengan sb-x
   3) Titik ekstrim kurva parabola diperoleh dengan rumus:

   $$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$$

4) Tentukan sumbu simetris yang membagi kurva parabola menjadi dua bagian yang sama. Garis sumbu simetris ini melewati titik ekstrim, persamaan garis simetris ini adalah:

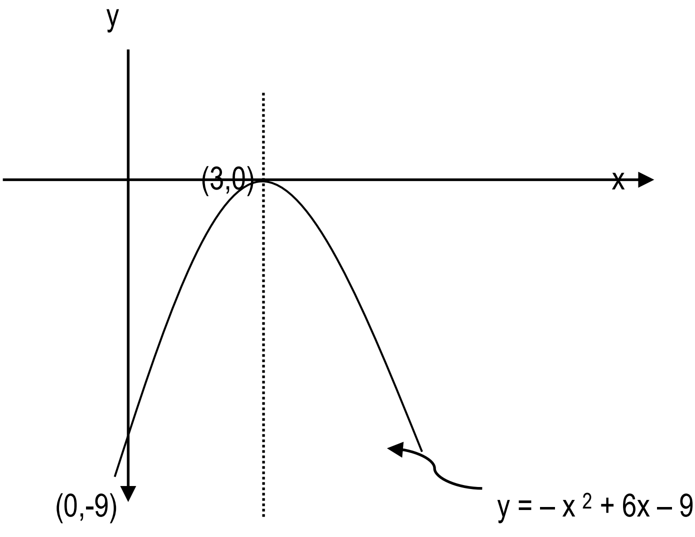
$$x = \frac{-b}{2a}$$

Contoh

Diketahui fungsi kuadrat $y = -x^2 + 6x - 9$, gambarkan kurva fungsi kuadrat tersebut dengan menggunakan sifat-sifat matematis.

Penyelesaian

1) Tipot kurva dengan sb-y, misalkan $x = 0 \rightarrow y = -9$, sehingga tipotnya $(0,-9)$
2) Tipot kurva dengan sb-x, misalkan $y = 0 \rightarrow -x^2 + 6x - 9 = 0$ karena $D = b^2 - 4ac$ $D = 36 - 4(-1)(-9) = 0$, maka hanya ada satu tipot yaitu $x_1 = x_2 = (-6/-2) = 3 \rightarrow (3,0)$
3) Titik ekstrimnya merupakan titik ekstrim maksimum $\rightarrow (3,0)$
4) Sumbu simetrisnya adalah $x = 3$



C. Pencarian Akar-Akar Persamaan dengan Faktorisasi

Dimisalkan suatu perkalian (x-3) dengan (x-3), maka akan menghasilkan $x^2 - 6x + 9$. Proses dg arah sebaliknya dari $x^2 - 6x + 9$ menghasilkan (x-3) (x-3) disebut Faktorisasi Penyelesaian dg faktorisasi seringkali bersifat coba-coba. Tehnik Faktorisasi dari $x^2 - 6x + 9 = 0$ sbb:

1. Faktorkan x^2 dan 9 dan letakkan dalam tanda kurung (x) (x)
2. Kombinasikan suku yang menghasilkan suku tengah – 6x ,

   $x^2 - 6x + 9$

   3 dg 3 (tidak memenuhi)

   -3 dg -3 (memenuhi)

Ingat Jumlah perkalian 2 suku bagian dalam dg hasil perkalian 2 suku bagian luar harus sama dengan suku tengah, yaitu -6x.

1. Sehingga faktorisasinya adalah (x-3) (x-3)
2. (x-3) (x-3) = 0, x-3=0 sehingga $x_1=3$

   x-3=0 sehingga $x_2=3$

Rangkuman

- Fungsi kuadrat merupakan fungsi dengan pangkat tertinggi variabelnya dua.
- Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$ atau $Y = ax^2 + bx + c$
- Jika $a > 0$, maka kurva parabola terbuka ke atas (titik ekstrim minimum), sedangkan jika $a < 0$, maka kurva parabolanya terbuka ke bawah (titik ekstrik maksimum).

Latihan

1. Jelaskan konsep fungsi kuadrat!
2. Cari akar-akar persamaan pada persamaan di bawah ini dengan faktorisasi!

   a) $2 + 3x + x^2 = 0$

b). $x^2 - 4x + 4 = 0$

3. Gambarlah fungsi kuadrat berikut

a). $y = x^2 – x + 2$

b). $y = x^2 – 5x + 6$

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 5
APLIKASI FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada aplikasi konsep fungsi kuadrat dalam ekonomi. Kajian dalam paket ini meliputi aplikasi konsep fungsi kuadrat dalam fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar.

Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait konsep fungsi kuadrat yang dipahami selama ini; kedua dosen mempersilakan kelompok presentasi untuk mempresentasikan materi; ketiga dosen membahas dan mengklarifikasi materi presentasi disertai penguatan dengan pemberian contoh-contoh kasus ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Kemampuan memahami aplikasi konsep fungsi kuadrat dalam ekonomi

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan konsep fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar
2. Menjelaskan karakteristik grafik fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar yang berbentuk fungsi kuadrat
3. Menyelesaikan kasus-kasus ekonomi yang menerapkan konsep fungsi kuadrat
4. Menggambar fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar yang berbentuk kuadrat

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Konsep fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar dalam bentuk parabola
2. Metode menggambar fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (10 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep fungsi kuadrat dan aplikasinya
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep fungsi kuadrat

Kegiatan Inti (70 menit)

1. Penjelasan mengenai aplikasi fungsi kuadrat dalam ekonomi, terutama yang diaplikasikan pada konsep fungsi permintaan, fungsi penawaran, dan keseimbangan pasar.
2. Mahasiswa berkelompok sesuai kelompok masing-masing. Satu kelas terdapat lima kelompok.
3. Dua kelompok bertugas presentasi makalah yang ditugaskan. Tiga kelompok lain menyimak dan membahas.
4. Masing-masing kelompok mendiskusikan sub tema:
   Kelompok 1: Fungsi Permintaan dan Penawaran
   Kelompok 2: Keseimbangan Pasar
   Selesai presentasi setiap kelompok, kelompok lain memberikan klarifikasi
5. Penguatan dan *feedback* hasil diskusi dari dosen
6. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi
7. Penguatan materi perkuliahan oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.
2. Memberikan soal latihan

Lembar Kegiatan

Setiap kelompok membuat laporan hasil presentasi kelompok terhadap materi yang dibahas.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep aplikasi fungsi linier dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Diskusikan dan bahas materi yang telah dipresentasikan kelompok presentasi!
2. Catat dan laporkan hasil diskusi di lembaran kertas
3. Berikan penilaian terhadap kelompok presentasi dengan draft penilaian sebagai berikut

Tabel 5.1: Daftar Nilai Pembuatan Presentasi

Klp	**Penguasaan Materi**	**Kekompakan**	**Makalah**	**Powerpoint**	**Performance**
I					
II					

Keterangan Nilai:

90 = sangat baik   80 = baik   70 = cukup   60 = kurang

Uraian Materi

APLIKASI FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI

Fungsi kuadrat juga diaplikasikan dalam fungsi permintaan, penawaran, maupun keseimbangan pasar. Sebagaimana karakteristik fungsi kuadrat yang kurvanya berbentuk parabola, maka kurva yang terbentuk dalam fungsi permintaan, penawaran, maupun keseimbangan pasar adalah sebagaimana karakteristik kurva parabola.

A. Aplikasi Fungsi Kuadrat dalam Fungsi Permintaan

Sebagaimana telah dipaparkan pada paket sebelumnya, fungsi permintaan didefinisikan sebagai hubungan antara jumlah barang/jasa yang diminta dengan variabel lain. Variabel lain tersebut bisa berupa harga barang, pendapatan, selera, mode, dan lain-lain. Selain berbentuk linier, fungsi permintaan juga ada yang berbentuk kuadrat atau parabola. Lebih jelas bentuk dan karakteristiknya dapat dilihat pada dua contoh di bawah ini

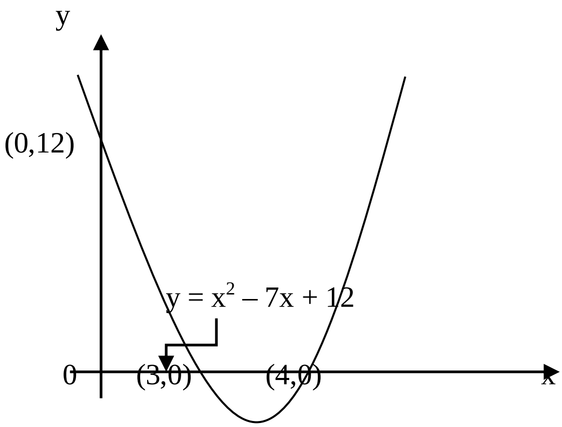
Contoh 1: Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $y = x^2 - 7x + 12$ dimana y adalah harga (P) dan x adalah kuantitas (Q). Gambarkan kurvanya!

Penyelesaian:

- Tipot dengan sb-y: Misalkan $x = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow$ tipot (0,12)
- Tipot dengan sb-x: Misalkan $y = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

  Karena $D = 49 - 4(1)(12) = 1 \rightarrow D > 0$, maka ada dua tipot dengan sb-x, yaitu:

  $x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 3$ dan $x_2 = 4 \rightarrow$ tipot (3,0) dan (4,0)
- Karena $a > 0$, maka kurva parabola terbuka ke atas → Titik ekstrim minimum. Titiknya adalah $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right) \rightarrow \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}\right)$



Berdasarkan kurva permintaan di atas, tampak bahwa fungsi permintaan $y = x^2 - 7x + 12$ berlaku untuk interval jumlah permintaan $0 \leq x$

$\leq$ 3 dan harga permintaan $0 \leq y \leq 12$. Atau fungsi permintaan di atas dinyatakan dengan: $P = Q^2 - 7Q + 12$ untuk $0 \leq Q \leq 3$ dan $0 \leq P \leq 12$

Contoh 2:

Diketahui fungsi permintaan suatu barang $y = -x^2 - x + 12$, dimana y adalah harga (P) dan x adalah kuantitas (Q). Gambarkan kurvanya.

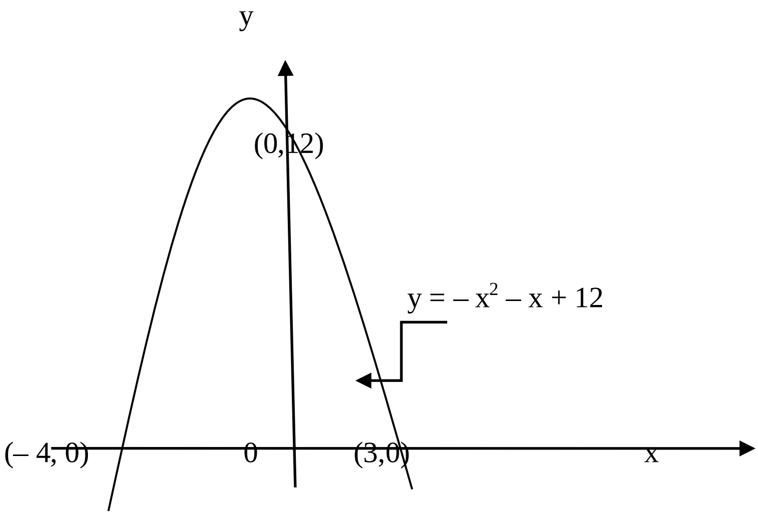
Penyelesaian.

- Tipot dengan sb-y: Misalkan $x = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow$ tipot (0,12)
- Tipot dengan sb-x: Misalkan $y = 0 \rightarrow -x^2 - x + 12 = 0$

  Karena $D = 1 - 4(-1)(12) = 49 \rightarrow D > 0$, maka terdapat dua tipot dengan sb-x, yaitu:

  $-x^2 - x + 12 = 0 \rightarrow (x + 4)(-x + 3) = 0 \rightarrow \rightarrow x_1 = -4$ dan $x_2 = 3 \rightarrow$ tipot (– 4,0) dan (3,0)
- Karena $a < 0$, maka kurva parabola terbuka ke bawah $\rightarrow$ titik ekstrim maksimum

  $$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{49}{4}\right)$$



Berdasarkan kurva permintaan di atas, tampak bahwa fungsi permintaan $y = -x^2 - x + 12$ berlaku untuk interval jumlah permintaan $0 \leq x \leq 3$ dan harga permintaan $0 \leq y \leq 12$ atau fungsi permintaan di atas dinyatakan dengan:

$P = -Q^2 - Q + 12$ untuk $0 \leq Q \leq 3$ dan $0 \leq P \leq 12$

B. Aplikasi Fungsi Kuadrat dalam Fungsi Penawaran

Fungsi penawaran ialah fungsi yang menyatakan hubungan antara jumlah barang/jasa yang ditawarkan dengan variabel lain. Variabel lain tersebut bisa berupa harga barang, teknologi yang tersedia, harga faktor-faktor produksi, harga produk lain, harapan produsen terhadap harga produk, dan lain-lain. Selain berbentuk linier, fungsi penawaran juga ada yang berbentuk kuadrat atau parabola. Aplikasi fungsi kuadrat dalam fungsi penawaran dipaparkan pada contoh di bawah.

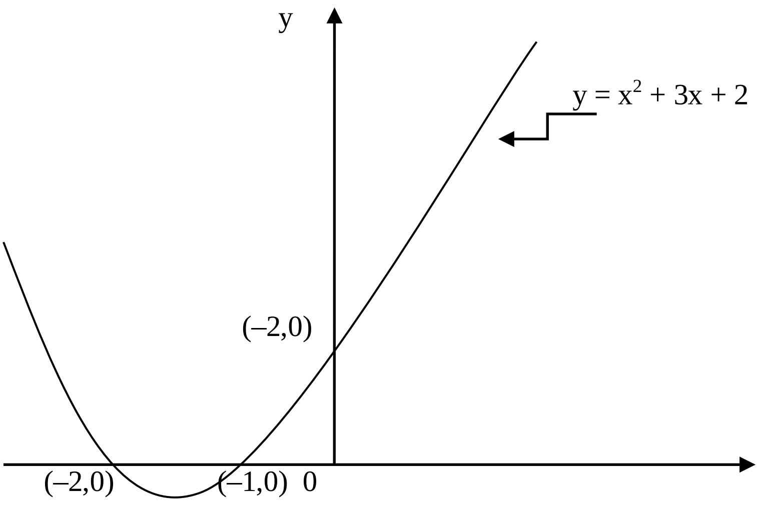
Contoh: Diketahui fungsi penawaran sejenis barang adalah $y = x^2 + 3x + 2$, dimana y adalah harga (P) dan x adalah kuantitas (Q). Gambarkan kurvanya.

Penyelesaian

- Tipot dengan sb-y: Misalkan $x = 0 \rightarrow y = 2$
- Tipot dengan sb-x: Misalkan $y = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

  Karena $D = 9 - 4(1)(2) = 1 \rightarrow D > 0$, maka terdapat dua tipot dengan sb-x, yaitu:

  $x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow (x + 1)(x + 2) = 0 \rightarrow \rightarrow x_1 = -1$ dan $x_2 = -2 \rightarrow$ tipot $(-1,0)$ dan $(-2,0)$
- Karena $a > 0$, maka kurva parabola terbuka ke atas $\rightarrow$ titik ekstrim minimum. $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right) \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$



Berdasarkan kurva penawaran di atas, tampak bahwa fungsi penawaran $y = x^2 + 3x + 2$ berlaku untuk interval jumlah penawaran $x \geq 0$ dan harga permintaan $y \geq 2$ atau fungsi permintaan di atas dinyatakan dengan: $P = Q^2 + 3Q + 2$ untuk $Q \geq 0$ dan $P \geq 2$.

C. Aplikasi Fungsi Kuadrat dalam Keseimbangan Pasar

Keseimbangan pasar terjadi ketika jumlah permintaan sama dengan jumlah penawaran atau $Q_d = Q_s$, harga yang tercipta pada keseimbangan pasar merupakan harga keseimbangan (P_e).

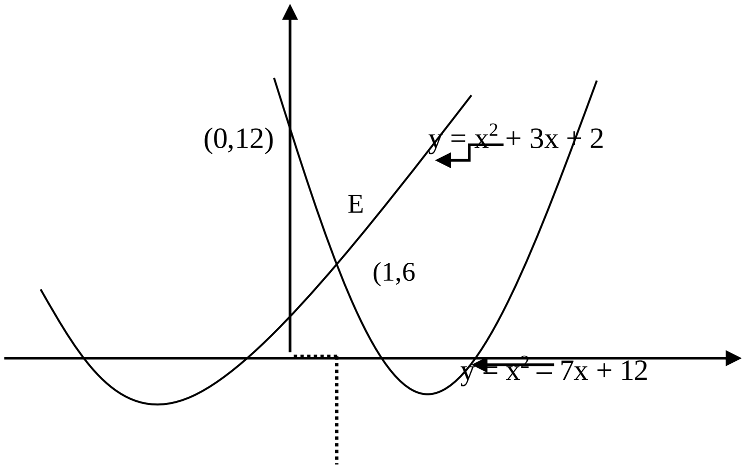
Contoh: Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran sejenis barang adalah: D: $y = x^2 – 7x + 12$

S: $y = x^2 + 3x + 2$

Tentukan keseimbangan pasarnya dan gambarkan kurvanya.

Penyelesaian: Pada keseimbangan pasar berlaku Qd = Qs atau Pd = Ps, sehingga keseimbangan pasar dapat diselesaikan dengan substitusi:

$x^2 – 7x + 12 = x^2 + 3x + 2 \rightarrow 10x = 10 \rightarrow x = 1$ dan y dapat dicari dengan mensubstitusikan nilai x = 1 ke dalam fungsi permintaan atau fungsi penawaran, sehingga diperoleh nilai y sebagai y = (1)2 + 3(1) + 2 =6. Jadi keseimbangan pasar tercapai pada E(1,6).



Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Fungsi kuadrat juga dapat diaplikasikan dalam fungsi permintaan, penawaran, maupun keseimbangan pasar. Namun sesuai dengan karakteristik fungsi kuadrat yang kurvanya berbentuk parabola, maka kurva yang terbentuk dalam fungsi permintaan, penawaran, maupun keseimbangan pasar adalah sebagaimana karakteristik kurva parabola.
2. Syarat Keseimbangan pasar berbentuk kuadrat juga sama dengan keseimbangan pasar ketika dalam bentuk fungsi linier yatu terjadi ketika jumlah permintaan sama dengan jumlah penawaran atau $Q_d = Q_s$, harga yang tercipta pada keseimbangan pasar merupakan harga keseimbangan (P_e).

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

Tentukan keseimbangan pasarnya dan gambarkan kurvanya, jika diketahui fungsi permintaan dan penawarannya adalah:

1. D: $2Q + P - 10 = 0$ dan S: $P^2 - 8Q - 4 = 0$
2. D: $Q^2 + 5Q - P + 1 = 0$ dan S: $2Q^2 + P - 9 = 0$
3. D: $P^2 + P + Q - 20 = 0$ dan S: $2P^2 - Q - 3P - 4 = 0$

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 6
FUNGSI EKSPONEN DAN LOGARITMA

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep fungsi eksponen dan logaritma. Kajian dalam paket ini meliputi bentuk umum fungsi eksponen dan logaritma, sifat-sifat fungsi eksponen dan logaritma, dan penggambaran fungsi eksponen dan logaritma. Pemahaman akan konsep ini sangat penting karena salah satu aplikasinya bisa digunakan dalam analisis ekonomi seperti konsep bunga.

Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait pemahaman awal mahasiswa tentang konsep fungsi eksponen dan logaritma, dihubungkan juga dengan penggunaannya dalam ekonomi; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh soal dan aplikasinya dalam ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas, spidol dan penggaris.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Mahasiswa memahami konsep fungsi eksponen dan logaritma

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menyebutkan bentuk umum fungsi eksponen dan logaritma
2. Menjelaskan sifat-sifat fungsi eksponen dan logaritma
3. Menggambar grafik fungsi eksponen dan logaritma

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Bentuk umum fungsi eksponen dan logaritma

1. Bentuk umum fungsi eksponen dan logaritma
2. Sifat-sifat fungsi eksponen dan logaritma
3. Langkah-langkah menggambar fungsi eksponen dan logaritma

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (15 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep fungsi eksponensial dan logaritma
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep eksponensial dan logaritma

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Penjelasan mengenai metode bentuk umum fungsi eksponen dan logaritma, sifat-sifatnya, dan langkah-langkah menggambar fungsi eksponen dan logaritma
2. Membagi mahasiswa dalam 5 kelompok
3. Masing-masing kelompok diberikan tugas menyelesaikan soal terkait bentuk umum fungsi eksponen dan logaritma, sifat-sifatnya, dan langkah-langkah menggambar fungsi eksponen dan logaritma

4. Masing-masing kelompok membahas dan menyelesaikan soal yang diberikan kemudian menyerahkan hasil penyelesaian soal kepada dosen
5. Presentasi hasil diskusi terhadap kelompok terpilih
6. Selesai presentasi, kelompok yang tidak presentasi memberikan klarifikasi
7. Penguatan hasil presentasi oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)
1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)
1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Membuat laporan hasil diskusi kelompok terhadap penyelesaian soal yang diberikan.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep fungsi linier dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Bahas soal-soal yang diberikan dengan kelompok masing-masing

2. Catat dan laporkan hasil penyelesaian soal sesuai diskusi kelompok kepada dosen di lembaran kertas

Uraian Materi

FUNGSI EKSPONEN DAN LOGARITMA

A. FUNGSI EKSPONEN

1. Pengertian dan Rumus Umum

Fungsi Eksponen yaitu suatu fungsi dimana variabel bebasnya merupakan bilangan pangkat dari suatu konstanta.

Rumus umum :

$$Y = a^{n} \quad \text{dimana } a \geq 0 \text{ dan } a \neq 1$$

dengan a disebut basis atau bilangan pokok dan n disebut eksponen atau pangkat.

2. Sifat-Sifat Eksponen

Eksponen memiliki sifat – sifat sebagai berikut:

1. $a^{0} = 1$
2. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^{x}}$
3. $a^{1/x} = \sqrt[x]{a}$
4. $a^{m} \,.\, a^{n} = a^{m+n}$
5. $\dfrac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$
6. $(a^{m})^{k} = a^{m.k}$

Contoh dan Penyelesaian :

1). $3^2 x 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$

2). $2^4 : 2^2 = 2^{4-2} = 2^2$

3). $(7^3)^2 = 7^{3.2} = 7^6$

4). $(5 \times 6)^3 = 5^3 x 6^3$

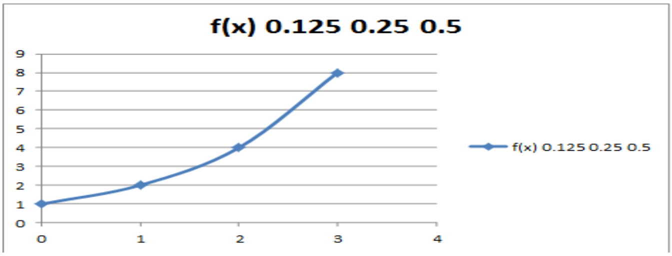
3. Metode Menggambar Fungsi EKsponen

Langkah-langkah menggambar grafik sebagai berikut

1. Buatlah tabel yang menunjukan hubungan x dengan fungsi eksponennya.
   $y = f(x) = a^{\mathbf{x}}$**,**
2. Masukkan sembarang nilai pada setiap x dan tentukan hasilnya pada f(x)
3. Setiap titik (x,y) yang diperoleh dari tabel, dihubungkan menjadi kurva melengkung, sehingga diperoleh grafik fungsi eksponen $y = f(x) = a^{\mathbf{x}}$

Dengan menggunakan nilai-nilai dalam tabel berikut ini, kita dapat melukiskan kurva untuk fungsi $f(x) = 2^X$

x	…	0	1	2	3	…
f(x)	….	1	2	4	8	….



Gambar 6.1: Grafik Fungsi Eksponen $f(x) = 2^X$

B. FUNGSI LOGARITMA

1. Pengertian dan Rumus Umum Logaritma

Fungsi logaritma adalah suatu fungsi dimana variabel bebasnya dalam bentuk logaritma. Logaritma sebenarnya adalah invers atau kebalikan dari eksponensial (perpangkatan).

Suatu bentuk pangkat $5^3 = 125$ dapat dimisalkan menjadi $a^b = c$. Jika ubah kedalam bentuk logaritma menjadi ${}^5\log 125 = 3$ Atau ${}^5\log 5^3 = 3$

Dengan demikian kita mendapatkan rumus umum

$\boxed{{}^a\log c = b}$ Untuk $a > 0,\ a \neq 1$,

Sebagai contoh:

$$ {}^2\log 8 = 3 \qquad \text{karena} \qquad 2^3 = 8 $$

$$ {}^{1/3}\log 27 = -3 \qquad \text{karena} \qquad (1/3)^{-3} = 27 $$

Selanjutnya, fungsi f dengan rumus: $f(x) = {}^a\log x$ disebut fungsi logaritma.

2. Sifat-Sifat Logaritma

Logaritma memiliki sifat – sifat sebagai berikut:

1. $\log a \cdot b = \log a + \log b$

2. $\text{Log}\ a/b = \text{Log}\ a - \text{Log}\ b$

3. $\text{Log}\ a^{k} = k\ .\ \text{Log}\ a$

4. $^{a}\text{Log}\ b = \dfrac{\text{Log}\ b}{\text{Log}\ a}$

5. $M = a^{N} \rightarrow$ maka $N = a\ \text{Log}\ M$

Contoh dan Penyelesaian

Hitunglah nilai Y dari fungsi log dibawah ini :

1. $Y = \text{Log}\ 3\ .\ 5 \rightarrow \log 3 + \log 5 = 0{,}47712 + 0{,}69897 = 1{,}17609$

2. $Y = \text{Log}\ \dfrac{4}{6} \rightarrow \log 4 - \log 6 = 0{,}60205 - 0{,}77815 = -\ 0{,}17616$

3. $Y = \text{Log}\ 3^{4} \rightarrow 4.\ \text{Log}\ 3 = 4 \times 0{,}47712 = 1{,}90848$

4. $Y = {}^{7}\text{Log}\ 6 \rightarrow \log 6 / \log 7 = 0{,}7782/0{,}8451 = 0{,}9208$

5. $6 = 4^{n} \rightarrow n = ? \rightarrow 4 \log 6 = 4 \times 0{,}7782 = 3{,}1128$

3. Metode Menggambar Fungsi Logaritma

Sebagaimana penggambaran fungsi pada fungsi eksponen, maka langkah-langkah menggambar grafik fungsi logaritma kurang lebih sama. Langkah-langkahnya adalah

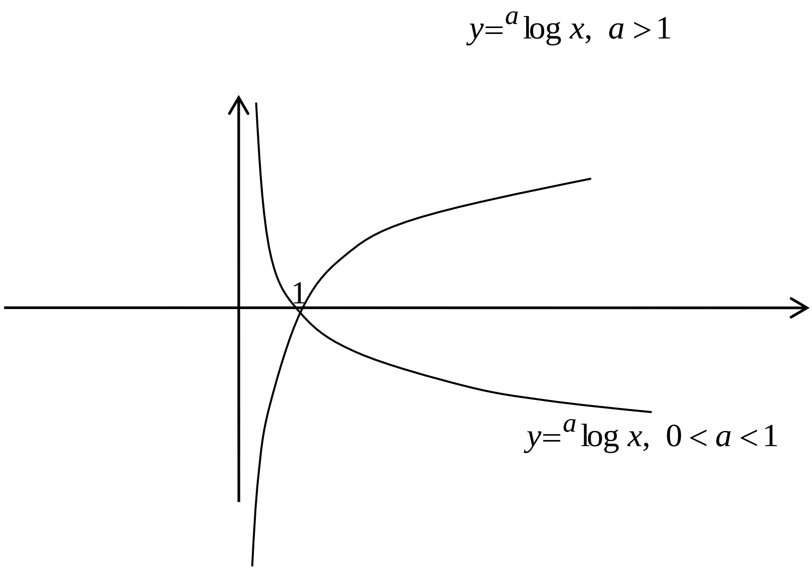
1. Buatlah tabel yang menunjukan hubungan x dengan fungsi logaritmanya.

   $y = f(x) = {}^{a}\text{Log}\ x,$

2. Masukkan sembarang nilai pada setiap x dan tentukan hasilnya pada f(x)

3. Setiap titik (x,y) yang diperoleh dari tabel, dihubungkan menjadi kurva melengkung, sehingga diperoleh grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\text{Log } b$

Sketsa grafik fungsi logaritma dapat diperlihatkan pada gambar dibawah



Gambar 6.2: Grafik Fungsi Logaritma

Latihan

A. Hitunglah besarnya nilai Y dari fungsi eksponen dibawah ini.

1. $Y = 8^{0}$
2. $Y = 7^{-4x}$
6. $Y = 4^{3} . 4^{5}$
7. $Y = \frac{8^5}{8^3}$

3 . $Y = (6^{3})^{4}$

4. $Y = 9^{¾}$

5. $Y = 6X^{-3/2}$

B. Hitunglah besarnya nilai Y dari fungsi logaritma dibawah ini.

1. ${}^{3}\log (27) = {}^{3}\log (3 \times 9) = {}^{3}\log 3 + {}^{3}\log 9 = 1 + 2 = 3$

2. ${}^{3}\log (9) = {}^{3}\log (27 : 3) = {}^{3}\log 27 - {}^{3}\log 3 =$

3. ${}^{2}\log 2^{4} = 4 \times ({}^{2}\log 2) = 4 \times 1 = 4$

4. $({}^{2}\log 9)({}^{9}\log 8) = {}^{2}\log 8 =$

5. $({}^{7}\log 8) : ({}^{7}\log 2) = {}^{2}\log 8 =$

Rangkuman

- Fungsi Eksponen yaitu suatu fungsi dimana variabel bebasnya merupakan bilangan pangkat dari suatu konstanta.
  Rumus umum : $Y = a^{n}$ dimana $a \geq 0$ dan $a \neq 1$
- Fungsi logaritma adalah suatu fungsi dimana variabel bebasnya dalam bentuk logaritma. Logaritma sebenarnya adalah invers atau kebalikan dari eksponensial (perpangkatan).
  Rumus umum
  $\boxed{{}^{a}\log c = b}$ Untuk $a > 0$, $a \neq 1$,

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 7
APLIKASI FUNGSI EKSPONEN DAN LOGARITMA DALAM EKONOMI

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada aplikasi konsep fungsi eksponen dan logaritma dalam ekonomi. Kajian dalam paket ini meliputi aplikasi konsep fungsi eksponen dan logaritma dalam fungsi pertumbuhan meliputi bunga majemuk dan pertumbuhan penduduk. Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait konsep fungsi eksponen dan logaritma yang dipahami selama ini; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh kasus ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Kemampuan memahami aplikasi konsep fungsi eksponen dan logaritma.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan konsep fungsi bunga majemuk dan pertumbuhan penduduk.
2. Menjelaskan karakteristik grafik fungsi bunga majemuk dan pertumbuhan penduduk.
3. Menyelesaikan kasus-kasus ekonomi yang menerapkan konsep fungsi fungsi bunga majemuk dan pertumbuhan penduduk.
4. Menggambar grafik fungsi bunga majemuk dan pertumbuhan penduduk.

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Konsep fungsi eksponen dan logaritma
2. Konsep fungsi bunga majemuk dan pertumbuhan penduduk.
3. Metode menggambar fungsi bunga majemuk dan pertumbuhan penduduk.

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (10 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep fungsi eksponen dan logaritma dan aplikasinya
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep fungsi eksponen dan logaritma

Kegiatan Inti (70 menit)

1. Penjelasan mengenai aplikasi fungsi eksponen dan logaritma dalam ekonomi, terutama yang diaplikasikan pada konsep fungsi bunga majemuk dan pertumbuhan penduduk.

2. Mahasiswa berkelompok sesuai kelompok masing-masing. Satu kelas terdapat lima kelompok.
3. Dua kelompok bertugas presentasi makalah yang ditugaskan. Tiga kelompok lain menyimak dan membahas.
4. Masing-masing kelompok mendiskusikan sub tema:
   Kelompok 1: Fungsi Bunga Majemuk
   Kelompok 2: Pertumbuhan Penduduk
   Selesai presentasi setiap kelompok, kelompok lain memberikan klarifikasi
5. Penguatan dan *feedback* hasil diskusi dari dosen
6. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi
7. Penguatan materi perkuliahan oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan

Setiap kelompok membuat laporan hasil presentasi kelompok terhadap materi yang dibahas.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep aplikasi fungsi linier dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Catat dan laporkan hasil penyelesaian soal sesuai diskusi kelompok kepada dosen di lembaran kertas.
2. Catat dan laporkan hasil diskusi di lembaran kertas
3. Berikan penilaian terhadap kelompok presentasi dengan draft penilaian sebagai berikut

Tabel 5.1: Daftar Nilai Pembuatan Presentasi

Klp	**Penguasaan Materi**	**Kekompakan**	**Makalah**	**Powerpoint**	**Performance**
I					
II					

Keterangan Nilai:

90 = sangat baik 80 = baik 70 = cukup 60 = kurang

Uraian Materi

Aplikasi Fungsi Eksponen dan Logaritma dalam Ekonomi

Aplikasi fungsi eksponen dan logaritma dalam bidang ekonomi dan bisnis (analisa ekonomi) terdapat pada fungsi pertumbuhan. Pembahasan fungsi pertumbuhan pada bagian ini dibatasi hanya pada fungsi bunga majemuk dan pertumbuhan penduduk / biologis.

A. Fungsi Bunga Majemuk

Besarnya modal yang dibungakan tergantung dari waktu lamanya modal dibungakan asal tingkat bunga konstan. Jika modal (pokok) sebesarnya k_0 dibungakan k kali per tahun dengan bunga sebesar 100 r % (atau r) per tahun maka setelah n tahun, modal tersebut akan menjadi :

$$\boxed{K_n = K_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{n.k}} \qquad (7.1)$$

Apabila k sangat besar yaitu k → ∞, maksudnya bunga yang dibayarkan secara kontinyu atau bunga ditambahkan terus menerus terhadap modal, maka persamaan (7.1) di atas akan menjadi :

$$\boxed{K_n = K_{o.e}{}^{r.k}} \qquad (7.2)$$

Dengan,

K_o = Modal awal atau besar modal pada tahun yang ke nol.

K_n = Modal akhir atau besar modal pada tahun yang ke n.

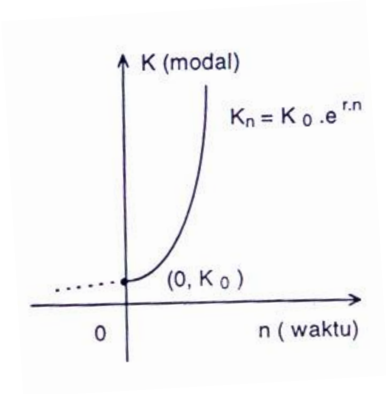
e = Bilangan basis dalam logaritma Natural (e = 2,718 ...)

k = Kelipatan bunga yang dibayar per tahun

n = Waktu lamanya modal (pokok) dibungakan

r = Besarnya bunga per tahun

jika fungsi $K_n = K_{o\ e}{}^{r.n}$ dibuat grafiknya, secara umum bentuknya sebagai berikut :



Contoh 1

Seseorang menabung uang sebesar 4 juta rupiah dengan bunga 5 % per tahun. Berapakah jumlah uangnya (pokok tabungan + bunga) setelah 10 tahun.

(a) Bila bunga dibayarkan sekali setahun

Penyelesaian

(a) Bunga dibayarkan sekali setahun, berarti k = 1

K_o = 4 juta n = 10 tahun r = 5 % = 0,05 K_n = ...?

$$K_n = K_o \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{n.k}$$

$$= 4\left(1 + \frac{0,05}{1}\right)^{1x10}$$

$$= 4\,(1 + 0,05)^{10}$$

$$= 4\,(1,05)^{10}$$

K_n = 6,515785 (pergunakan kalkulator)

Jadi, jumlah uang yang diterima setelah 10 tahun sebanyak 6,515785 juta rupiah

Contoh 2

Seorang petani membutuhkan uang sebesar 5 juta rupiah pada 10 tahun yang akan datang. Berapa jumlah uang yang harus ditabung mulai sekarang dengan bunga 24% per tahun untuk memperoleh jumlah uang yang diharapkan ?

Penyelesaian

K_n = 5 juta rupiah = Rp. 5.10^6

n = 10 tahun, r = 24 % = 0,24 dan k = 1

K_o = ... ?

$$K_n = K_o \left(1 + \frac{r}{1} \right)^{1xn}$$

$$5.10^6 = K_o (1 + 0,24)^{10}$$

$$5.10^6 = K_o (1,24)^{10}$$

$$K_0 = \frac{5.106^6}{(1,24)^{10}}$$

$$= 581.772,49$$

Jadi, uang yang harus ditabung mulai sekarang sebesar Rp. 581.772,49

B. Pertumbuhan Penduduk / Biologis

Bila penduduk suatu negara (daerah) pada suatu saat P_o mengalami pertumbuhan sebesar 100 r % per tahun (atau r pertahun), maka setelah t tahun, jumlah penduduk menjadi :

$$\boxed{P_t = P_o (1 + r)^t} \quad (7.3)$$

Bagi suatu negara (daerah) dengan jumlah penduduk yang besar, maka pertumbuhan penduduk berlangsung hampir kontinyu, maka jumlah penduduk setelah t tahun menjadi :

$$\boxed{P_t = P_o . e^{r.t}} \quad (7.4)$$

Misalkan (1+r) pada persamaan (7.3) sama dengan R yaitu (1+r) = R, maka persamaan (7.3) di atas dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\boxed{P_t = P_o\, R^t} \qquad (7.5)$$

P_t = Jumlah penduduk pada tahun yang ke t'

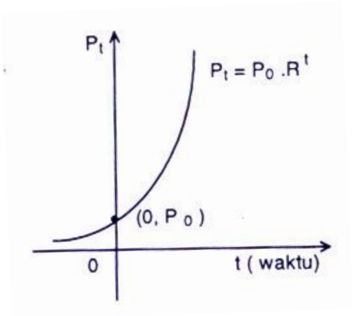
P_o = Jumlah penduduk pada tahun awal yaitu tahun yang ke nol

r = Tingkat pertumbuhan

R = (r + 1) = tingkat pertumbuhan + 1

Persamaan (7.4) di atas diperoleh juga pada model penduduk dengan setiap anggota / individu menimbulkan R – 1 anggota / individu baru dalam satu satuan waktu, dengan anggapan tidak ada anggota yang meninggal.

Teoritisi organisasi menyatakan bahwa fungsi $P_t = P_o R^t$ dapat dipergunakan untuk menggambarkan pertumbuhan awal suatu perusahaan yang tumbuh dengan pesat. Jika fungsi $P_t = P_o R^t$ dibuat grafiknya secara umum bentuknya sebagai berikut :



Gambar 6.12

Contoh

Pada tahun 1981 penduduk sebuah kota adalah 629.039 jiwa. Sedangkan pada tahun 1986 jumlah penduduknya adalah 771.186 jiwa.

Pertanyaan :

(a) Berapa tingkat pertumbuhan penduduk kota tersebut

(b) Perkirakan jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 1996

Penyelesaian

Persoalan di atas akan diselesaikan melalui sifat-sifat logaritma, walaupun juga dapat diselesaikan melalui sifat-sifat eksponen.

(a) $P_o = 629.039$

$P_t = 771.186$

$t = 5$ (dari tahun 1981 s.d 1986)

$r = ...\ ?$

$P_t = P_o(1 + r)^t$

$\text{Log } P_t = \text{Log } P_o (1 + r)^t$

$\text{Log } P_t = \text{Log } P_o + \text{Log } (1 + r)^t$

$\text{Log } P_t = \text{Log } P_o + t \text{ Log } (1 + r)$

$\text{Log } 771.186 = \text{Log } 629.039 + 5. \log (1 + r)$

$5,8872 = 5,7987 + 5 . \text{Log } (1 + r)$

$5 \text{ Log } (1 + r) = 5,8872 - 5,7987$

$= 0,0885$

$$\text{Log } (1 + r) = \frac{0,0885}{5} = 0,0177$$

$(1 + r) = 1,0415$

$r = 1,0415 - 1$

$= 0,0415$

$= 4,15\ \%$

Jadi tingkat pertumbuhan penduduk kota tersebut per tahun adalah 4,15 %.

(b) Dari tahun 1981 s.d 1996, ini berarti

$t = 15$

$P_o = 629.039$

$r = 0,0415$

$t = 15$

$P_t = ... ?$

$P_t = P_o (1 + r)^t$

$\text{Log } P_t = \text{Log } P_o (1 + r)^t$

$\text{Log } P_t = \text{Log } P_o + t . \text{Log} (1 + r)$

$= \text{Log } 629.039 + t. \text{Log} (1 + 0,0415)$

$= 5,7987 + 15 \text{ Log} (1,0415)$

$= 5,7987 + 15 (0,0177)$

$= 5,7987 + 0,2655$

$= 6,0642$

$P_t = 1159311,1$

Jadi, jumlah anggota organisasi profesi tersebut setelah 5 tahun adalah 10.240 anggota (orang)

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

- Aplikasi konsep eksponensial dan logaritma terdapat pada konsep bunga majemuk dan pertumbuhan penduduk.
- Model bunga majemuk dirumuskan:

$$K_n = K_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{n.k}$$

- Pada suatu kasus saat bunga ditambahkan kontinu atau terus menerus terhadap modal, maka rumus yang digunakan adalah

$$K_n = K_{o.e}{}^{r.k}$$

- Pertumbuhan penduduk pada t tahun digunakan rumus

$$P_t = P_o\,(1 + r)^t$$

- Pada suatu kasus saat pertumbuhan penduduk berlangsung hampir kontinyu, maka jumlah penduduk setelah t tahun menjadi :

$$P_t = P_o.\, e^{r.t}$$

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Seorang mahasiswa menabung uang sebesar Rp 500.000,00 dalam jangka waktu 20 tahun dengan tingkat bunga 15 % per tahun. Berapakah jumlah uang yang terima setelah 20 tahun, jika
   (a) Bunga dibayarkan tiap bulan ?
   (b) Bunga dibayarkan 2 kali setahun ?
   (c) Bunga dibayarkan per triwulan ?
   (d) Bunga dibayarkan secara kontinyu ?
2. Pada tahun 2000 penduduk sebuah negara sebanyak 203 juta jiwa. Jika tingkat pertumbuhan penduduk negara tersebut

tetap r = 1,2 % per tahun. Berapa jumlah penduduk negara tersebut pada tahun 2005 ?

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 8
LIMIT

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep limit. Kajian dalam paket ini meliputi konsep limit, pengujian suatu limit ada atau tidak, dan penggunaan kaidah-kaidah limit untuk menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan limit. Pemahaman akan konsep limit sangat penting, mengingat limit merupakan pintu gerbang memahami konsep kalkulus (diferensial dan integral).

Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait definisi limit yang dipahami selama ini; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh soal dan aplikasinya dalam ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Mahasiswa memahami konsep limit

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan pengertian limit
2. Menentukan suatu limit ada atau tidak
3. Menggunakan kaidah-kaidah limit untuk menyelesaikan soal-soal limit
4. Menjelaskan kontinuitas fungsi

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Konsep limit
2. Kaidah-kaidah limit
3. Kontinuitas fungsi

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (15 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep limit
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep limit

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Penjelasan mengenai konsep limit dan kaidah-kaidah limit.
2. Membagi mahasiswa dalam 5 kelompok
3. Masing-masing kelompok diberikan tugas menyelesaikan soal terkait limit
4. Masing-masing kelompok membahas dan menyelesaikan soal yang diberikan kemudian menyerahkan hasil penyelesaian soal kepada dosen
5. Presentasi hasil diskusi terhadap kelompok terpilih
6. Selesai presentasi, kelompok yang tidak presentasi memberikan klarifikasi

7. Penguatan hasil presentasi oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Membuat laporan hasil diskusi kelompok terhadap penyelesaian soal yang diberikan.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep fungsi linier dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Laporkan hasil diskusi kelompok secara individu dalam selembar kertas

Uraian Materi

Rangkuman

A. Pengertian Limit Secara Aljabar dan Grafis

Pengertian Secara Aljabar

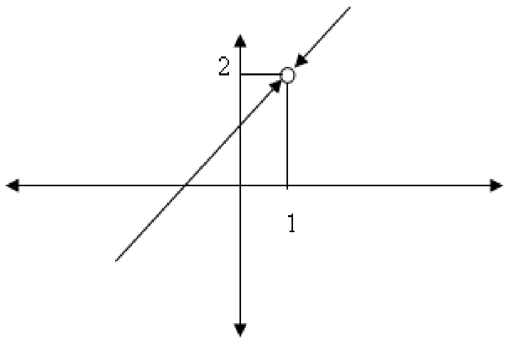
Misalkan $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. Dengan mengambil beberapa nilai x untuk x mendekati 1 dari kanan atau kiri, diperoleh tabel nilai berikut.

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	1,9999	?	2,0001	2,001	2,01	2,1

Dari tabel di atas terlihat jika x mendekati 1 (ditulis $x \to 1$), maka nilai $f(x)$ akan mendekati 2. Hal ini dapat ditulis $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Pengertian Secara Grafis

Jika nilai-nilai x dan $f(x)$ pada tabel di atas digambarkan sebagai titik-titik pada sistem koordinat kemudian dihubungkan, akan diperoleh gambar berikut



Gambar 8.1: Fungsi f (x) = $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

Dari beberapa uraian di atas berikut diberikan definisi limit:

Limit f(x) x mendekati c sama dengan L, ditulis:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika untuk setiap x yang cukup dekat dengan c, tetapi $x \neq c$, maka f(x) mendekati L.

B. Teknik Aljabar Untuk Menghitung Limit

Sifat-sifat dasar limit yang dinyatakan dalam beberapa teorema berikut ini sangat diperlukan dalam hitung limit.

Teorema 1 $\lim\limits_{x \to c} A = A$, $A, c \in R$ atau $\lim\limits_{x \to c} x = c$.

Teorema 2 Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ keduanya ada dan $k \in R$ maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

i. $\lim\limits_{x \to c} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x)$

ii. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x \to c} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x). \lim\limits_{x \to c} g(x)$

iv. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

1. $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 - 2x) = \lim\limits_{x \to 4} 3x^2 - \lim\limits_{x \to 4} 2x = 3 \lim\limits_{x \to 4} x^2 - 2 \lim\limits_{x \to 4} x = 3\ (4)^2 - 2\ (4) = 40.$

2. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim\limits_{x \to 4} x} = \dfrac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 4} (x^2 + 9)}}{4} = \dfrac{1}{4} \sqrt{\lim\limits_{x \to 4} x^2 + \lim\limits_{x \to 4} 9}$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\left[\lim_{x \to 4}\right]^2 + 9} = \frac{1}{4} \sqrt{4^2 + 9} = \frac{5}{4}.$$

3. $\lim\limits_{x \to 3} \left[f^2(x). \sqrt[3]{g(x)}\right] = \lim\limits_{x \to 3} f^2(x). \lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to 3} f(x)\right]^2 \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 3} g(x)}$

$$= [3]^2. \sqrt[3]{8} = 18.$$

4. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

Penyelesaian :

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

Maka $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \dfrac{1}{4}$

C. Kontinuitas Fungsi

Andaikan domain dari fungsi f(x) memuat suatu interval terbuka yang memuat c maka : f(x) disebut kontinu di c jika dan hanya jika ketiga syarat berikut dipenuhi yaitu :

1. f (c) ada
2. $\lim\limits_{x\to c}$ f(x) ada
3. $\lim\limits_{x\to c}$ f(x) = f (c)

Selanjutnya f(x) dikatakan kontinu pada interval terbuka (a,b) jika kontinu pada setiap titik dalam interval tersebut.

Jika suatu fungsi f(x) tidak memenuhi syarat kontinu disebut fungsi diskontinu.

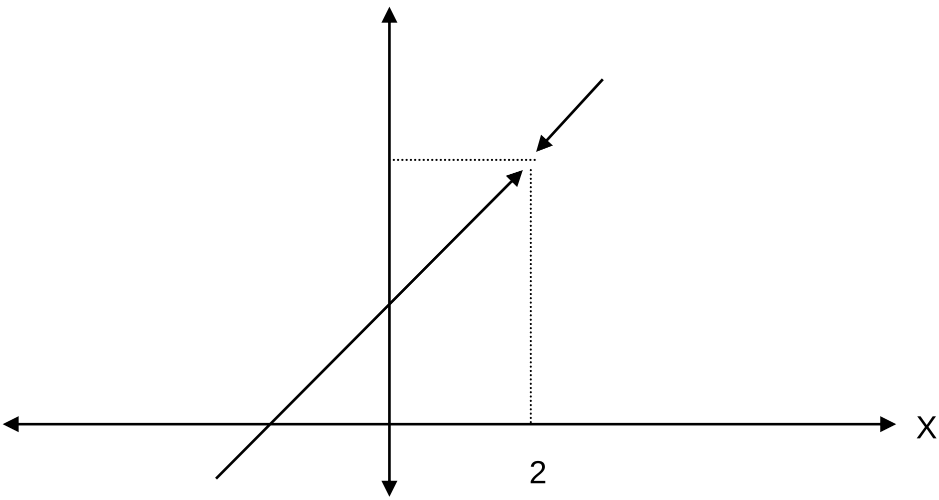
Contoh 1:

Selidiki kontinuitas fungsi f (x) = $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ di x = 2

Penyelesaian :

Diselidiki apakah tiga syarat fungsi kontinu dipenuhi f (x) = $\dfrac{x^2-4}{x-2}$

1. f(2) = $\dfrac{0}{0}$ suatu harga tak tentu. Jadi f(2) tidak ada. Karena syarat 1 tidak dipenuhi maka f(x) diskontinu di x = 2. Dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 8.2: Fungsi f (x) = $\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Contoh 2 :

Selidiki kontinuitas fungsi f (x) = $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ di x = 1

Penyelesaian :

a. f (1) = $\dfrac{1^2-1}{1^2+1} = \dfrac{1-1}{1+1} = \dfrac{0}{2}$ = 0 , ada

b. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{1-1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$, ada

c. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0$ Jadi f(x) kontinu di x = 1

Rangkuman

- Limit f(x) x mendekati c sama dengan L, ditulis:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

- f(x) disebut kontinu di c jika dan hanya jika ketiga syarat berikut dipenuhi yaitu :
  - f (c) ada
  - $\lim\limits_{x \to c}$ f(x) ada
  - $\lim\limits_{x \to c}$ f(x) = f (c)

Latihan

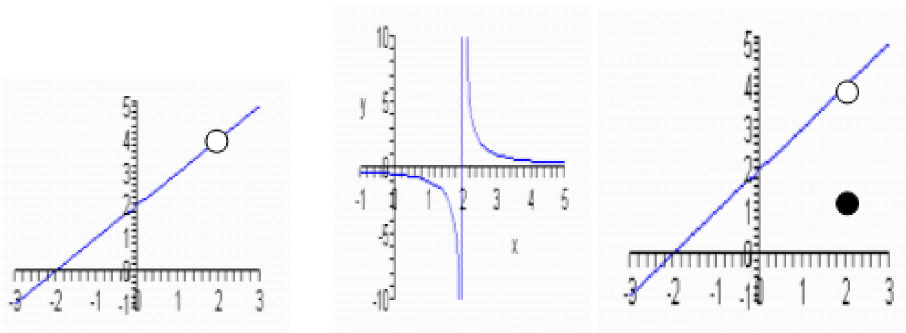
Untuk soal 1 – 6, tunjukkan pernyataan berikut dengan definisi limit.

1. $\lim\limits_{x \to 1} (x+2) = 3$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x \to -1} x^2 = 1$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+2}{x-1} = -2$
5. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$
6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Untuk soal berikutnya, buktikan fungsi berikuti kontinu atau dis kontinu.

Di bilangan manakah masing-masing fungsi berikut diskontinu?

a. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ b. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ c. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, \text{jika } x\neq 2\\ 1, \text{jika } x=2\end{cases}$



a b c

Gambar fungsi

Paket 9
DIFERENSIAL (TURUNAN)

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep diferensial. Kajian dalam paket ini meliputi konsep diferensial, kaidah-kaidah diferensial, konsep fungsi menaik dan menurun, dan konsep titik ekstrim.

Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait konsep diferensial yang dipahami selama ini; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh kasus ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Kemampuan memahami konsep diferensial

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan konsep diferensial
2. Kaidah-kaidah diferensial
3. Menyelesaikan persoalan diferensial dengan menggunakan kaidah integral tertentu
4. Menjelaskan konsep fungsi menaik dan menurun
5. Menjelaskan konsep titik ekstrim fungsi

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Konsep diferensial
2. Kaidah-kaidah diferensial
3. Konsep fungsi menaik dan menurun
4. Konsep titik ekstrim fungsi

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (10 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep diferensial
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep diferensial

Kegiatan Inti (70 menit)

1. Penjelasan mengenai konsep diferensial dan kaidah-kaidah diferensial
2. Membagi mahasiswa dalam 5 kelompok

3. Masing-masing kelompok diberikan tugas menyelesaikan soal terkait diferensial tertentu
4. Masing-masing kelompok membahas dan menyelesaikan soal yang diberikan kemudian menyerahkan hasil penyelesaian soal kepada dosen
5. Presentasi hasil diskusi terhadap kelompok terpilih
6. Selesai presentasi, kelompok yang tidak presentasi memberikan klarifikasi
7. Penguatan hasil presentasi oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.
2. Mengingatkan mahasiswa untuk menyelesaikan pekerjaan rumah yang diberikan.

Lembar Kegiatan

Membuat laporan hasil diskusi kelompok terhadap penyelesaian soal yang diberikan.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep diferensial dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Bahas soal-soal yang diberikan dengan kelompok masing-masing

2. Catat dan laporkan hasil penyelesaian soal sesuai diskusi kelompok kepada dosen di lembaran kertas.

Uraian Materi

TURUNAN

A. Konsep Turunan Suatu Fungsi

Banyak kejadian-kejadian di alam semesta ini yang melibatkan perubahan kuantitas, misalnya : perubahan benda yang bergerak, pertumbuhan ekonomi, pertambahan penduduk, perubahan tegangan listrik, dan sebagainya. Idea untuk menentukan laju perubahan tersebut pada mulanya diletakkan dasar oleh seorang ahli matematika bangsa Inggris yang bernama Isaac Newton (1642 – 1727) ketika ia menentukan perbandingan perubahan benda yang bergerak dalam ilmu mekanika.

Suatu benda yang bergerak selalu menggunakan waktu, dikatakan bahwa benda yang bergerak itu merupakan fungsi dari pada waktu. Andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan oleh persamaan :

$$s = f(t)$$

yang disebut persamaan gerak suatu benda, dengan s menyatakan jarak yang ditempuh benda yang bergerak selama satuan waktu t , maka kecepatan v adalah :

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Jika $t = t_0 + h$, maka $h \to 0$ apabila $t \to t_0$ sehingga persamaan menjadi :

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$, dimana t_0 : saat awal

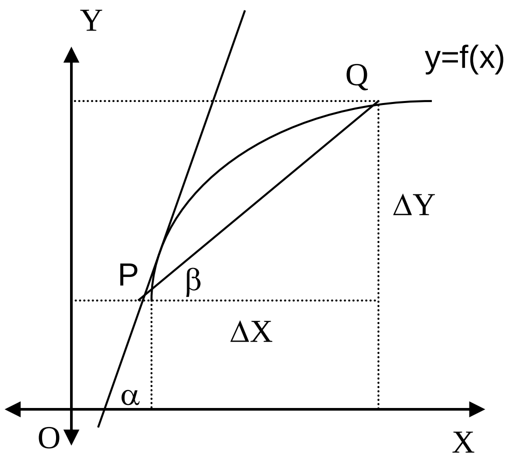
Proses matematik diatas disebut differensiasi, dan hasilnya disebut turunan

Untuk fungsi $y = f(x)$ yang dapat diturunkan sering digunakan y' untuk menyatakan nilai turunan di x yaitu $y' = f'(x)$. Perlu diperhatikan bahwa f' adalah fungsi , sedangkan $f'(x)$ atau y' menyatakan nilai di titik x.

Dengan demikian, jika $y = f(x)$ maka f' (turunan f) adalah laju perubahan f terhadap variabel bebas x , dan $f'(x_0)$ adalah laju perubahan f di titik $x = x_0$

B. Tafsiran Geometri untuk Turunan

Pandang grafik fungsi y = f (x) pada gambar sebagai berikut :



Titik P(x,y) dan Q(x+Δx, y+Δy) terletak pada kurva y = f (x)
Jika variabel bebas x bertambah dengan Δx, maka y juga bertambah dengan Δy, sehingga : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

dan kecondongan atau gradien garis $\overleftrightarrow{PQ}$ adalah tan β yaitu :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Jika $\Delta x \to 0$ maka titik Q bergerak mendekati P sedemikian hingga garis $\overleftrightarrow{PQ}$ akan menempati garis singgung di titik P .Sehingga diperoleh limit yaitu :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ = tan α yang merupakan derivative (turunan) dari y = f (x). Sedangkan tan α merupakan gradien garis singgung di titik P(x, y).

Ahli matematika bangsa Jerman yang bernama Wiehelm Gattfried Leibniz (1646 – 1716) menyatakan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dengan $\frac{dy}{dx}$

Jadi : $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Secara geometris dapat disimpulkan bahwa $\frac{dy}{dx}$ merupakan koefisien arah (gradien) garis singgung pada kurva y = f (x) di titik P(x,y) dan dapat ditentukan persamaan garis singgung pada kurva y = f (x) di titik singgung P(x_0, y_0) yaitu : $(y - y_0) = \frac{dy}{dx} (x - x_0)$

Dengan demikian untuk fungsi y = f (x) didefinisikan :

a). dx , disebut diferensial x dengan relasi $dx = \Delta x$

b). dy , disebut diferensial y dengan relasi $dy = f'(x)\,dx$

Diferensial variabel bebas adalah sama dengan pertambahan variabel , tetapi diferensial variabel tak bebas tidak sama dengan pertambahan variabel itu.

Perlu diperhatikan bahwa jika y = f(x) fungsi yang dapat diturunkan maka turunannya dapat dinyatakan dengan notasi-notasi berikut :

y', $f'(x)$ yaitu notasi Lagrange atau aksen

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$, yaitu notasi Leibniz

Contoh 1:

Diketahui : $f(x) = x^3$, carilah $f'(x)$ langsung dari definisi.

Penyelesaian :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= 3x^2 + 3xh + h^2, \; h \neq 0$$

Jadi $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

Contoh 2:

Jika $f(x) = x^2 - 3x + 2$: tentukan persamaan garis singgung pada grafik $y = x^2 - 3x + 2$ di titik (3,2)

Penyelesaian :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\{(x+h)^2 \quad 3(x+h)+2\} - (x^2 \quad 3x+2)}{h}$$

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 \quad 3x - 3h + 2 \; - x^2 + 3x \quad 2}{h}$$

$$= \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} \quad = 2x + h - 3$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h - 3) = 2x - 3$$

sehingga gradien garis singgung di titik (3,2) adalah $f'(3) = 2.3 - 3 = 3$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah :

$$y - 2 = 3\,(x - 3)$$
$$\Rightarrow \quad y = 3x - 7 \text{ atau } 3x - y - 7 = 0$$

C. Beberapa Teorema Penurunan

Berdasarkan pengertian turunan suatu fungsi diatas dapat dirumuskan beberapa teorema sebagai berikut :

1. Teorema Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^r$, maka $f'(x) = r\,x^{r-1}$ berlaku untuk bilangan real r dan untuk semua x dimana $f'(x)$ menghasilkan bilangan real

Contoh :

Tentukan $f'(x)$ jika $f(x) = x^5$

Penyelesaian

Dengan aturan pangkat di dapat $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

2. Teorema Aljabar Turunan

Andaikan fungsi-fungsi f dan g dapat diturunkan di titik x dan c konstan, maka fungsi-fungsi f + g, f - g, c.f, f.g, $\frac{f}{g}$ (asal $g(x) \neq 0$) juga dapat diturunkan di x . Selanjutnya :

1. $[\, f(x) \pm g(x) \,]' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $[\, c\, f(x) \,]' = c\, f'(x)$ untuk c konstan
3. $[\, f(x).\, g(x) \,]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ (aturan hasil kali)
4. $[\, f(x)/g(x) \,]' = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[\, g(x) \,]^2}$ jika $g(x) \neq 0$(aturan pembagian)

Contoh :

1). Jika $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 5$, tentukan $f'(x)$

Penyelesaian :

$$f'(x) = (2x^3)' - (4x^2)' + (3x)' + (5)'$$
$$= 2(3x^2) - 4(2x) + 3(1) + 0$$
$$= 6x^2 - 8x + 3$$

2). Jika $f(x) = (2x^3 - x)(x^4 + 3x)$, tentukan $f'(x)$

Penyelesaian :

Ada dua cara , pertama dengan aturan hasil kali

$$f'(x) = (2x^3 - x)'(x^4 + 3x) + (2x^3 - x)(x^4 + 3x)'$$
$$= (6x^2 - 1)(x^4 + 3x) + (2x^3 - x)(4x^3 + 3)$$
$$= (6x^6 - x^4 + 18x^3 - 3x) + (8x^6 - 4x^4 + 6x^3 - 3x)$$

$= 14x^6 - 5x^4 + 24x^3 - 6x$ atau dikalikan dulu sehingga :

$$f'(x) = (2x^7 - x^5 + 6x^4 - 3x^2)'$$
$$= 14x^6 - 5x^4 + 24x^3 - 6x$$

3). Tentukan $f'(x)$, jika $f(x) = \dfrac{(2x^2 + x)}{x^3 + 3}$

Penyelesaian :

Dengan aturan pembagian di dapat :

$$f'(x) = \frac{(2x^2 + x)'(x^3 + 3) - (2x^2 + x)(x^3 + 3)'}{(x^3 + 3)^2}$$

$$= \frac{(4x + 1)(x^3 + 3) - (2x^2 + x)(3x^2)}{(x^3 + 3)^2}$$

$$= \frac{(4x^4 + x^3 + 12x + 3) - (6x^4 + 3x^3)}{(x^3 + 3)^2}$$

$$= \frac{-2x^4 - 2x^2 + 12x + 3}{(x^3+3)^2}$$

D.Turunan Orde Tinggi

Setiap fungsi bisa diturunkan lebih dari 1 kali (tergantung derajatnya). Dimualai turunan pertama (turunan dari fungsi awal), turunan kedua (turunan dari fungsi pertama, dst.

$contoh:$

$y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

$y' = dy/dx = 3x^2 - 8x + 5$

$y'' = d^2y/dx^2 = 6x - 8$

$y''' = d^3y/dx^3 = 6$

$y^{'v} = d^4y/dx^4 = 0$

Dengan mengetahui hub. antara fungsi dan turunannya → besarnya turunan pertama dan turunan kedua → akan bisa dikenali bentuk gambar dari fungsi tersebut. Dapat diketahui juga → kurva menaik atau menurun, titik ekstrim dan juga titik beloknya.

$contoh:$

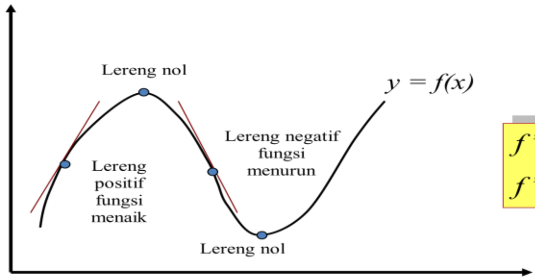
$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5 \rightarrow \text{fungsi kubik}$

$y' = dy/dx = x^2 - 8x + 5 \rightarrow \text{fungsi kuadrat}$

$y'' = d^2y/dx^2 = 2x - 8 \rightarrow \text{fungsi linear}$

$y''' = d^3y/dx^3 = 2 \rightarrow \text{konstanta}$

Turunan pertama dari sebuah fungsi non-linear dapat digunakan untuk menentukan apakah kurva dari fungsi yang bersangkutan menaik atau menurun pada kedudukan tertentu.



$f'(a) > 0,\ y = f(x)$ *menaik*

$f'(a) < 0,\ y = f(x)$*menurun*

E.Titik Ekstrim Fungsi

1. Titik Ekstrim Fungsi Kuadrat (Parabolik)

- Apabila turunan pertama $f'(x) = 0$, berarti $y = f(x)$ berada di titik ekstrim
- Untuk menentukan apakah titik ekstrim tersebut merupakan titik maksimum ataukah minimum, maka perlu dilakukan uji tanda terhadap $f'(a) = 0$.
- Jika $f'(x) > 0$ untuk $x < a$ dan $f'(x) < 0$ untuk $x > a$, maka titik ekstrimnya adalah titik maksimum.
- Jika $f'(x) < 0$ untuk $x < a$ dan $f'(x) > 0$ untuk $x > a$, maka titik ekstrimnya adalah titik minimum.
- Turunan pertama dari fungsi parabolik $y = f(x)$ berguna untuk menentukan letak titik ekstrimnya.
- Sedangkan turunan kedua berguna untuk mengetahui jenis titik ekstrim yang bersangkutan.

Contoh :

Perhatikan fungsi parabolik berikut dan turunan-turunannya, serta grafik yang dihasilkan. $y = f(x) = x^2 - 8x + 12$.

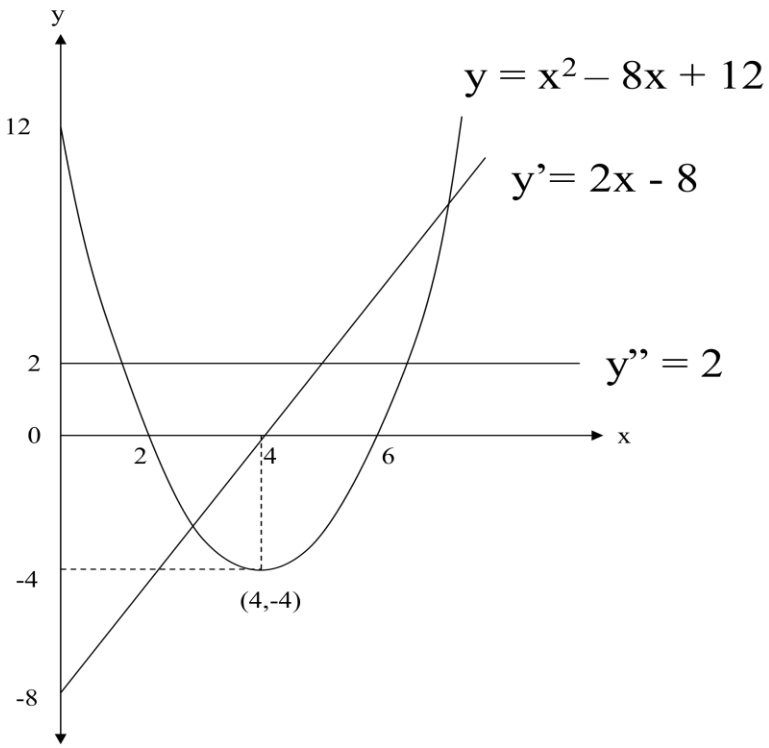
Penyelesaian

$y' = f'(x) = dy/dx = 2x - 8$ …….*fungsi linear*

$y'' = f''(x) = d^2y/dx^2 = 2$ ……….*konstanta*

Parabola $y = f(x) = x^2 - 8x + 12$, mencapai titik ekstrim – dalam hal ini titik minimum yaitu (4, -4)

$y' = 0$, nilai variabel bebas $x = 4$. $x = 4$ → *dimasukkan ke dalam persamaan Parabola* → *didapat nilai* $y = -4$



2. Titik Ekstrim Fungsi Kubik

- Parabola $y = f(x)$ mencapai titik ekstrim pada $y' = 0$
- Jika $y'' < 0$: bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik maksimum.
- Jika y" > 0 : bentuk parabolanya terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum.
- Titik maksimum atau minimum fungsi kubik, serta titik beloknya dapat dicari melalui turunan pertama dan kedua dari fungsi tersebut.

Contoh:

Perhatikan fungsi kubik berikut dan turunan-turunannya, serta grafik yang dihasilkan.

$y = 1/3x^3 - 3x^2 + 8x - 3$ ………….*fungsi kubik*

$y' = x^2 - 6x + 8$ ……………………*fungsi kuadratik*

$y'' = 2x - 6$ …………………………..*fungsi linear*

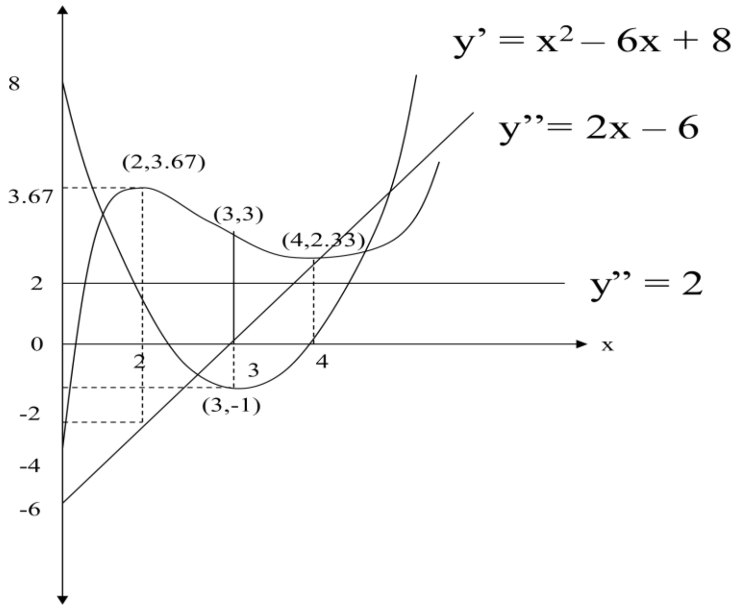
Penyelesaian:

- Jika $y' = 0$,

  $$x^2 - 6x + 8 = 0$$

  $$(x-2)(x-4) = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 4$$

- Untuk $x_1 = 2$ dimasukkan pada persamaan kubik → maka $y = 3.67\ (2, 3.67)$ → titik ekstrim maksimum
- Untuk $x_1 = 2$ apabila dimasukkan dalam turunan ke dua, maka $y'' = -2 < 0$ (turunan kedua negatif)
- Untuk $x_2 = 4$ dimasukkan pada persamaan kubik → maka $y = 2.33\ (4, 2.33)$ → titik ekstrim minimum
- Untuk $x_2 = 4$ apabila dimasukkan dalam turunan ke dua, maka $y'' = 2 > 0$ (turunan kedua positif)
- Jika y'' = 0 → 2x – 6 = 0 → x = 3, nilai x = 3 dimasukkan dalam persamaan kubik → didapatkannilai y = 3 → titik belok (3,3)



- Fungsi kubik y = f(x) mencapai titik ekstrim pada y' = 0

- Jika y” < 0 pada y’ = 0, maka titik ekstrimnya adalah titik maksimum
- Jika y” > 0 pada y’ = 0, maka titik ekstrimnya adalah titik minimum
- Fungsi kubik y = f(x) berada di titik belok pada y” = 0

Latihan

Untuk soal no 1-3, Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan tepat!

1. Jelaskan konsep turunan dalam kajian matematika!
2. Jelaskan konsep menaik, menurun, dan titik ekstrim dalam pada konsep turunan!
3. Gambarlah grafik fungsi $y = x^3 - 3x^2$

Untuk soal 4- . Selesaikan Turunan Fungsi berikut sampai Turunan Terakhir:

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10$
5. $f(x) = 5 - 12x + 15x^2 - 6x^3$
6. $f(x) = (12x^5 + 14x) + (4x^5 - 16x^3)$
7. $f(x) = 10(x^4 - 15)$
8. $f(x) = 2(x^3 + 10x - 2)$
9. $f(x) = (2x + 3)(3x^2 - 4)$
10. $f(x) = (x^3 + 2x^2 - 3)(x^2 + 5)$
11. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{2x - 7}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{3x - 2}$

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

- Jika y = f(x) fungsi yang dapat diturunkan maka turunannya dapat dinyatakan dengan notasi-notasi berikut :
  y', $f'(x)$ yaitu notasi Lagrange atau aksen

  $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}$ f(x) , yaitu notasi Leibniz

- Teorema Aturan Pangkat untuk turunan.
  Jika $f(x) = x^r$, maka $f'(x) = r\,x^{r-1}$ berlaku untuk bilangan real r dan untuk semua x dimana $f'(x)$ menghasilkan bilangan real
- Teorema Aturan Aljabar

  $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

  $[c\,f(x)]' = c\,f'(x)$ untuk c konstan

  $[f(x).\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ (aturan hasil kali)

  $[f(x)/g(x)]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ jika $g(x) \neq 0$(aturan

  pembagian)

- Dengan mengetahui hub. antara fungsi dan turunannya → besarnya turunan pertama dan turunan kedua → akan bisa dikenali bentuk gambar dari fungsi tersebut. Dapat diketahui juga → kurva menaik atau menurun, titik ekstrim dan juga titik beloknya.

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 10
APLIKASI DIFERENSIAL DALAM EKONOMI

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada aplikasi konsep diferensial dalam ekonomi. Kajian dalam paket ini meliputi aplikasi konsep diferensial dalam fungsi biaya marginal, biaya minimum, penerimaan marginal, dan penerimaan maksimum.

Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait konsep diferensial yang dipahami selama ini; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh kasus ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Kemampuan memahami aplikasi konsep diferensial sederhana dalam ekonomi

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan konsep fungsi biaya, biaya marginal, biaya minimum, fungsi penerimaan, penerimaan marginal, dan penerimaan maksimum.
2. Menghitung besar dan kriteria dari: biaya total, biaya marginal, biaya rata-rata dan biaya rata-rata minimum.
3. Menghitung besar dan kriteria dari: penerimaan marginal, penerimaan rata-rata, dan penerimaan maksimum
4. Menggambar fungsi biaya dan fungsi penerimaan

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Konsep fungsi biaya, biaya marginal, dan biaya minimum
2. Konsep fungsi penerimaan, penerimaan marginal, dan penerimaan maksimum.
3. Metode menggambar grafik fungsi biaya dan fungsi penerimaan

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (10 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep diferensial fungsi sederhana dan aplikasinya
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep diferensial fungsi sederhana

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Penjelasan mengenai aplikasi diferensial fungsi sederhana dalam ekonomi, terutama yang diaplikasikan dalam biaya marginal, biaya minimum, penerimaan maksimal, dan penerimaan marginal
2. Membagi mahasiswa dalam 5 kelompok
3. Masing-masing kelompok diberikan tugas menyelesaikan soal terkait eksponen dan logaritma, sifat-sifatnya, dan langkah-langkah menggambar fungsi eksponen dan logaritma
4. Masing-masing kelompok membahas dan menyelesaikan soal yang diberikan kemudian menyerahkan hasil penyelesaian soal kepada dosen
5. Presentasi hasil diskusi terhadap kelompok terpilih
6. Selesai presentasi, kelompok yang tidak presentasi memberikan klarifikasi
7. Penguatan hasil presentasi oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.
2. Memberikan tugas rumah

Lembar Kegiatan

Setiap kelompok membuat laporan hasil presentasi kelompok terhadap materi yang dibahas.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep aplikasi diferensial dalam ekonomi dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Diskusikan dan bahas materi yang telah dipresentasikan kelompok presentasi!
2. Catat dan laporkan hasil diskusi di lembaran kertas
3. Berikan penilaian terhadap kelompok presentasi dengan draft penilaian sebagai berikut

Tabel : Daftar Nilai Pembuatan Presentasi

Klp	Penguasaan Materi	Kekompakan	Makalah	Powerpoint	Performance
I					
II					

Keterangan Nilai:

90 = sangat baik   80 = baik   70 = cukup   60 = kurang

Uraian Materi

A. Konsep Biaya

Istilah biaya berkaitan dengan tingkat harga suatu barang yang harus dibayar. Dalam konsep biaya, ada beberapa pengertian terkait biaya yang harus dipahami, diantaranya adalah biaya tetap, biaya variabel, biaya total, biaya rata-rata (average cost) dan biaya marjinal (marginal cost).

1. **Biaya Tetap (*Fixed Cost* : FC)**, yaitu, merupakan balas jasa dari pada pemakaian faktor produksi tetap (*fixed factor*), yaitu biaya yang dikeluarkan tehadap penggunaan faktor produksi yang tetap dimana besar kecilnya biaya ini tidak dipengaruhi oleh besar kecilnya output yang dihasilkan.

2. **Biaya tidak tetap (*Variabel Cost* : VC)**, yaitu merupakan biaya yang dikeluarkan sebagai balas jasa atas pemakaian variabel faktor, yang besar kecilnya dipengaruhi langsung oleh besar kecilnya output.
3. **Biaya Total (*Total Cost* : TC)**, yaitu merupakan jumlah keseluruhan dari biaya tetap dan biaya tidak tetap.
4. **Biaya Rata-rata (*Avarage Cost* : AC)**, yaitu merupakan ongkos persatu satuan output; baik untuk biaya rata-rata tetap (*avarage fixed cost*) dan biaya rata-rata variabel (*avarage variable cost*) dan rata-rata total (*avarage total cost*), diperoleh dengan jalan membagi biaya Total dengan jumlah output yang dihasilkan.
5. **Biaya Marginal (*Marginal cost* : MC)**, yaitu merupakan biaya tambahan yang diakibatkan dari penambahan satu-satuan unit output.
6. **Biaya Tetap Rata-Rata (*Avarage fixed cost* : AFC)**, biaya hasil bagi biaya tetap dengan jumlah yang dihasilkan.
7. **Biaya Variabel Rata-Rata (*Avarage Variable cost* : AVC)**, diperoleh dengan jalan membagi biaya variabel dengan jumlah produk yang dihasilkan.

Biaya tetap	:	FC = k	(k=konstanta)
Biaya variabel	:	VC = f(Q)	
Biaya total	:	TC = FC + VC = k + f(Q) = f(Q)	
Biaya tetap rata-rata	:	$AFC = \frac{FC}{Q}$	
Biaya variabel rata-rata	:	$AVC = \frac{VC}{Q}$	
Biaya rata-rata	:	$AC = \frac{TC}{Q} = AFC + AVC$	
Biaya marjinal	:	$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$	

B. Grafik Fungsi Biaya

Hubungan antara biaya total dan bagian-bagiannya secara grafik dapat dilihat sebagai berikut :

1. Biaya Total yang Berbentuk Fungsi Kuadrat Parabolic

Andaikan $TC = aQ^2 - bQ + c$

$VC = aQ^2 - bQ$

$FC = c$

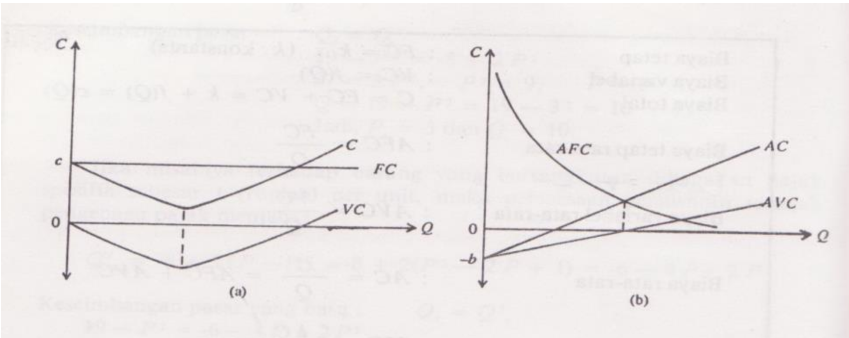
maka :

$AC = TC / Q = aQ - b + c / Q$

$AVC = VC / Q = aQ - b$

$AFC = FC / Q = c / Q$

Baik biaya total (TC) maupun biaya variabel (VC) sama-sama berbentuk parabola. Perbedaan antara keduanya terletak pada konstanta c, yang mencerminkan biaya tetap (FC). Secara grafik, kurva TC dan kurva VC adalah sebangun, dengan perbedaan sejarak c.



Karena TC dan VC berbentuk parabola maka, dengan memanfaatkan rumus titik ekstrim parabola, dapat dihitung tingkat produksi (Q) pada TC minimum dan VC minimum serta besarnya TC minimum dan VC minimum itu sendiri. TC dan VC yang berbentuk parabola membawa konsekuensi AC dan AVC berbentuk linear ; sementara AFC asimtotik (mendekati) terhadap kedua sumbu TC dan sumbu Q, sebab FC linear. Gambar (a) ; TC minimum dan VC minimum terjadi pada posisi Q yang sama, tetapi TC minimum itu sendiri tidak sama dengan VC minimum. Hanya jika FC = c = 0 maka TC minimum = VC minimum. Gambar (b) ; AC = AFC pada posisi Q dimana AVC = 0.

2. Biaya Total yang Berbentuk Fungsi Kubik

Andaikan $TC = aQ^3 – bQ^2 + cQ + d$

$VC = aQ^3 – bQ^2 - cQ$

$FC = d$

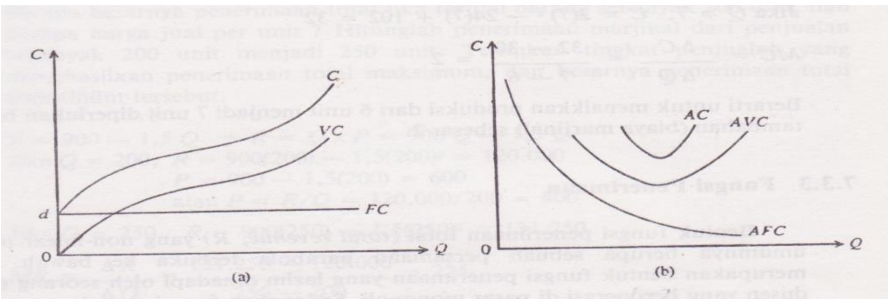
maka :

$AC = TC / Q = aQ^2 – bQ + c + d / Q$

$AVC = VC / Q = aQ^2 – bQ + c$

$AFC = FC / Q = d / Q$

Biaya total berfungsi kubik diatas selalu membuahkan AC dan AVC berbentuk parabola terbuka keatas. Sedangkan AFC tetap asimtotik terhadap sumbu TC dan sumbu Q, sebab FC selalu berupa konstanta yang kurvanya sejajar sumbu Q seperti Gambar (a). AC minimum dan AVC minimum juga terjadi pada kedudukan Q yang sama, perbedaan antara keduanya adalah sebesar AFC seperti Gambar (b).



Sehubungan dengan penerapan diferensial dalam fungsi biaya, maka aplikasi ekonominya diantaranya terdapat pada biaya marginal dan biaya minimum.

Biaya Marjinal (MC) adalah besarnya biaya yang harus ditambahkan, jika jumlah produksi ditambah 1 unit. Rumus biaya marjinal

MC = TC ^{I} = $\dfrac{dC}{dQ}$ dan MC minimum jika MC ^{I} = 0

C. Contoh dan Penyelesaiannya

Contoh

Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan TC = $2Q^2 - 24Q + 102$.

a. Pada tingkat produksi berapa unit biaya total (TC) ini minimum ?
b. Hitunglah besarnya biaya total minimum tersebut !
c. Hitung pula besarnya biaya tetap (FC), biaya variable (VC), biaya rata-rata (AC), biaya tetap rata-rata (AFC) dan biaya variable rata-rata (AVC) pada tingkat produksi tadi !
d. Seandainya dari kedudukan ini produksinya dinaikkan 1 unit, berapa besarnya biaya marjinal (MC) ?

Penyelesaian :

a. Untuk TC minimum maka $\rightarrow$ dTC / dQ = 0

   $TC = 2Q^2 - 24Q + 102$

   $dTC / dQ = 4Q - 24 = 0$

   $Q = 6$

b. Untuk Q = 6 $\rightarrow$ besarnya TC minimum adalah

   $TC = 2Q^2 - 24Q + 102$

   $TC = 2(6)^2 - 24(6) + 102$

TC = 30

c. Selanjutnya pada Q = 6 ini, jika TC = $2Q^2 - 24Q + 102$. Maka

FC = 102

VC = $2Q^2 - 24Q = 2(6)^2 - 24(6) = -72$

AC = TC / Q = 30 / 6 = 5

AFC = FC / Q = 102 / 6 = 17

AVC = VC / Q = -72 / 6 = -12

d. Seandainya produksi dinaikkan 1 unit, maka Q = 7 disubstitusikan pada persamaan biaya total.

TC = $2Q^2 - 24Q + 102$

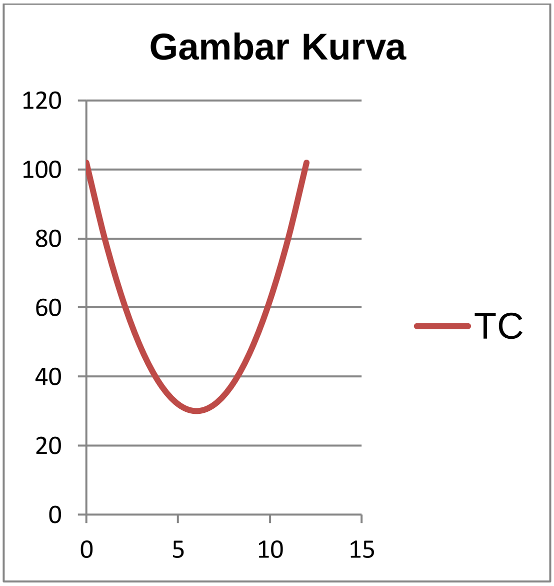
TC = $2(7)^2 - 24(7) + 102$

TC = 32

MC = ΔTC / ΔQ

MC = (32 – 30) / (7 – 6)

MC = 2



Q	TC = 2Q^2 – 24Q + 102
0	102
1	80
2	62
3	48
4	38
5	32
6	**30**
7	**32**
8	38
9	48
10	62

D. Fungsi Penerimaan

Penerimaan total (total revenue, TR) merupakan fungsi dari jumlah barang, juga merupakan hasil kali jumlah barang dengan harga barang per unit. Seperti halnya dalam konsep biaya, dalam konsep penerimaanpun dikenal pengertian rata-rata dan marjinal. **Penerimaan rata-rata (average revenue, AR)** ialah penerimaan yang diperoleh per unit barang, merupakan hasil bagi penerimaan total terhadap jumlah barang. **Penerimaan marjinal (marginal revenue, MR)** ialah penerimaan tambahan yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dihasilkan atau terjual.

Penerimaan total : TR = Q x P = f(Q)

Penerimaan rata-rata : $AR = \frac{TR}{Q}$

Penerimaan marjinal : $MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q}$

Mengingat TR = Q x P atau P = TR / Q, sedangkan AR = TR / Q, berarti penerimaan rata-rata (AR) tak lain adalah harga barang per unit (P). Secara grafik, kurva AR adalah juga kurva permintaan dalam bentuk P = f(Q)

Bentuk fungsi penerimaan total (total revenue, TR) ada yang berbentuk kuadratik (parabola), sehingga kurvanya terbuka ke bawah. Kondisi ini lazim dihadapi oleh seorang produsen yang beroperasi di pasar monopoli. Sedangkan fungsi penerimaan total yang linear, merupakan fungsi penerimaan yang dihadapi oleh seorang produsen yang beroperasi di pasar persaingan sempurna.

E. Contoh dan Penyelesaiannya

Contoh 1:

Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen monopolis ditunjukkan oleh P = 900 – 1,5Q.

a. Bagaimana persamaan penerimaan totalnya (TR) ?
b. Berapa besarnya penerimaan total (TR) jika terjual barang sebanyak 200 unit, dan berapa harga jual (P) per unit ?
c. Hitunglah penerimaan marjinal (MR) dari penjualan sebanyak 200 unit menjadi 250 unit !
d. Tentukan tingkat penjualan (Q) yang menghasilkan penerimaan total maksimum, dan besarnya penerimaan total (TR) maksimum tersebut!

Penyelesaian :

a. $P = 900 - 1{,}5Q \rightarrow \quad TR = Q \times P$

$$TR = Q \times (900 - 1{,}5Q)$$

$$TR = 900Q - 1{,}5Q^2$$

b. Jika Q = 200 maka $\quad TR = 900(200) - 1{,}5(200)^2$

$TR = 120.000$

$P = 900 - 1{,}5Q \rightarrow \quad P = 900 - 1{,}5(200)$

$P = 600$

Atau $P = R / Q$

$P = 120.000 / 200$

$P = 600$

c. Jika Q = 250 maka $TR = 900(250) - 1{,}5(250)^2$

$TR = 131.250$

$MR = \Delta TR / \Delta Q$

$= (131.250 - 120.000) / (250 - 200)$

$= 225$

d. Untuk TR maksimum maka $\rightarrow dTR / dQ = 0$

$TR = 900Q - 1{,}5Q^2$

$dTR / dQ = 900 - 3Q = 0$

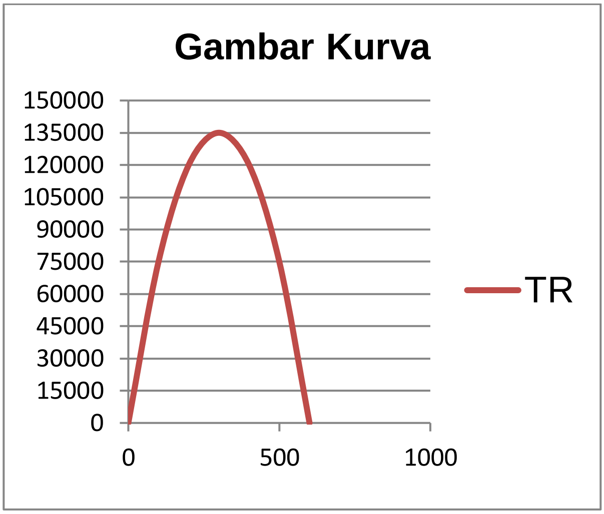
$Q = 300$

Untuk Q = 300 $\rightarrow$ besarnya TR maksimum adalah

$TR = 900Q - 1{,}5Q^2$

$TR = 900(300) - 1{,}5(300)^2$

$TR = 135.000$



Q	TR = 900Q – 1,5Q^2
0	0
100	75000
200	**120000**
250	**131250**
300	**135000**
400	120000
500	75000
600	0

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Aplikasi konsep diferensial di antaranya terdapat pada biaya marginal, biaya marginal minimum, penerimaan marginal, dan penerimaan maksimum.
2. Biaya marginal (MC) adalah biaya tambahan yang diakibatkan dari penambahan satu-satuan unit output. Dirumuskan $MC = TC' = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$. Sedangkan biaya akan minimum apabila TC' = 0. Demikian pula Marginal minimum (MC minimum) jika MC ' = 0
3. Penerimaan marginal (TR) adalah besarnya tambahan penerimaan, jika jumlah produksi atau barang yang terjual bertambah 1 unit.
4. Rumus penerimaan marjinal MR = TR ^{I} = $\frac{dR}{dQ}$. Penerimaaan akan maksimum (TR maks) Jika TR' = 0

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Jelaskan konsep biaya, biaya marginal, penerimaan, dan penerimaan marginal.
2. Jika Biaya total (TC) = f (Q) = $Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$. Tentukan
   a. Fungsi biaya marginalnya.
   b. Tingkat produksi/ penjualan saat biaya marjinalnya minimum
   c. Besarnya biaya marjinal minimum tersebut ?
3. Fungsi permintaan suatu barang $\rightarrow$ P = 16 – 2 Q

   Pada kuantitas barang berapa saat penerimaannya maksimum dan besar penerimaan maksimumnya ?

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 11
INTEGRAL TAK TENTU

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep integral tak tentu. Kajian dalam paket ini meliputi konsep integral tak tentu, kaidah-kaidah integral tak tentu, penggunaan kaidah integral tak tentu dalam penyelesaian soal.

Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait definisi integral tak tentu yang dipahami sebelumnya, dihubungkan juga dengan penggunaannya dalam ekonomi; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh soal dan aplikasinya dalam ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Mahasiswa memahami konsep integral tak tentu

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan konsep integral tak tentu
2. Menyelesaikan persoalan integral tak tentu dengan menggunakan kaidah integral tak tentu

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Konsep integral tak tentu
2. Kaidah-kaidah integral tak tentu

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (15 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep integral tak tentu
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep integral tak tentu

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Penjelasan mengenai konsep integral tak tentu dan kaidah-kaidah integral tak tentu
2. Membagi mahasiswa dalam 5 kelompok
3. Masing-masing kelompok diberikan tugas menyelesaikan soal terkait integral tak tentu
4. Masing-masing kelompok membahas dan menyelesaikan soal yang diberikan kemudian menyerahkan hasil penyelesaian soal kepada dosen
5. Presentasi hasil diskusi terhadap kelompok terpilih

6. Selesai presentasi, kelompok yang tidak presentasi memberikan klarifikasi
7. Penguatan hasil presentasi oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Membuat laporan hasil diskusi kelompok terhadap penyelesaian soal yang diberikan.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep integral tak tentu dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Bahas soal-soal yang diberikan dengan kelompok masing-masing
2. Catat dan laporkan hasil penyelesaian soal sesuai diskusi kelompok kepada dosen di lembaran kertas.

Uraian Materi

INTEGRAL

A. Konsep Integral

Integral merupakan cabang dari kalkulus. Kalkulus memiliki dua cabang utama, kalkulus diferensial dan kalkulus integral yang saling berhubungan. Materi kalkulus adalah pintu gerbang menuju pelajaran matematika lainnya. Kalkulus adalah ilmu mengenai perubahan, sebagaimana geometri adalah ilmu mengenai bentuk dan aljabar adalah ilmu mengenai pengerjaan untuk memecahkan persamaan serta aplikasinya. Kalkulus memiliki aplikasi yang luas dalam bidang-bidang sains, ekonomi, dan teknik; serta dapat memecahkan berbagai masalah yang tidak dapat dipecahkan dengan aljabar elementer.

Menurut sejarah, orang yang tercatat pertama kali mengemukakan ide tentang integral adalah *Archimedes*, seorang ahli matematika bangsa Yunani yang berasal dari Syarasusa (287 – 212 SM). Lambang $\int$ diperkenalkan oleh Leibniz pada abad ke – 17.

Integral sebagai operasi invers dari deferensial. Dalam hitung deferensial ditentukan suatu fungsi, jika fungsinya diketahui. Sebaliknya pada kalkulus integral turunannya yang diketahui dan yang dicari adalah fungsi. Oleh sebab itu, integral dapat dikatakan sebagai operasi invers dari diferensial.

Bila suatu fungsi $f(x)$ mempunyai turunan $f'(x)$, maka turunan itu biasanya dinyatakan dengan:

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$, dan diferensialnnya $dy = f'(x)dx$.

Proses untuk mendapatkan fungsinya kembali atau untuk mendapatkan *f* (*x*) disebut pengintegralan. Pengintegralan ini dinyatakan dengan:

$$\boxed{\int f(x)\, dx = \int F'(x)\, dx = F(x) + C}$$

Catatan:

$\int f(x)\, dx$: disebut unsur integrasi, dibaca " integral $f(x)$ terhadap x"

$f(x)$: disebut integran (yang diitegralkan)

$F(x)$: disebut fungsi asal (fungsi primitive, fungsi pokok)

C : disebut konstanta / tetapan integrasi

Perhatikan tabel 11.1 dibawah ini !

Pendiferensialan

F(x)	F′(x) = f(x)
$x^2 + 3x$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + 2$	$2x + 3$
$x^2 + 3x - 6$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + C$, dengan	$2x + 3$
C = konstanta $\in$ R	

Pengintegralan

Tabel 11.1: Proses Pendiferensialan dan Pengintegralan

Berdasarkan tabel diatas dapat disimpulkan bahwa dari F(x) yang berbeda diperoleh F′(x) yang sama, sehingga dapat dikatakan bahwa jika

F′(x) = f(x) diketahui sama, maka fungsi asal F(x) yang diperoleh belum tentu sama. Proses pencarian fungsi asal F(x) dari F′(x) yang diketahui disebut *operasi invers pendiferensialan (*anti turunan) dan lebih dikenal dengan nama operasi integral.

Dengan memperhatikan Tabel 11.1 dapat diperoleh rumus turunan fungsi

$$\text{Jika } f'(x) = x^n, \text{maka } f(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

B. Kaidah Integral

Secara umum kaidah-kaidah Integral dijelaskan di bawah ini

1. $\int k \, dx = k\,x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ bila n $\neq$ -1

3. $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1`} x^{n+1`} + c,$ dengan n $\neq -1$

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

5. $\int a.f(x)dx = a\int f(x)dx,$ dimana a konstanta sebarang.

3. Contoh dan Penyelesaian

1. $\int x^5 \, dx = \dfrac{x^6}{6} + C$

2. $\int \sqrt[3]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$

3. $\int (2x^2 - 5x + 3) dx = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 3x + C$

Latihan

1. $\int 3X^{-5} \, dX = \ldots$
2. $\int (3X^2 + \sqrt{X} - 7) \, dX = \ldots$
3. $\int (X^{1/3} + 7X + 4) \, dX = \ldots$
4. $\int 2 (X - 5)(X - 2) \, dX = \ldots$
5. $\int \sqrt{X} (X^2 + 4/X) \, dX =$
6. $\int (x^2 - 3x + 5) \, dx =$
7. $\int (X^2 + 2X - 4) \, dX = \ldots$

8). $\int 4 (X + 3)(X - 1) \, dX = \ldots$

Rangkuman

Antiturunan dari $f(x)$ adalah mencari fungsi yang turunannya adalah $f(x)$, ditulis $\int f(x) \, dx$. Secara umum dapat kita tuliskan :

$$\boxed{\int f(x) \, dx = \int F'(x) \, dx = F(x) + C}$$

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 11
APLIKASI INTEGRAL TAK TENTU DALAM EKONOMI

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada aplikasi konsep integral tak tentu dalam ekonomi. Kajian dalam paket ini meliputi aplikasi konsep integral tak tentu dalam fungsi biaya dan fungsi penerimaan jika diketahui fungsi marginalnya

Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait konsep integral tak tentu yang dipahami selama ini; kedua dosen memberi kesempatan kelompok presentasi untuk mempresentasikan materi; ketiga dosen membahas dan mengklarifikasi materi presentasi disertai penguatan dengan pemberian contoh-contoh kasus ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Kemampuan memahami aplikasi konsep integral tak tentu dalam ekonomi

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan konsep fungsi biaya, biaya marginal, fungsi penerimaan, penerimaan marginal, fungsi produksi, produksi marginal, fungsi utilitas, dan utilitas marginal
2. Menghitung besar dan kriteria dari biaya total , penerimaan, uitilitas, dan produksi, jika diketahui fungsi marginalnya.

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Konsep fungsi biaya dan biaya marginal
2. Konsep fungsi penerimaan dan penerimaan marginal
3. Konsep fungsi utilitas dan utilitas marginal
4. Konsep fungsi produksi dan produksi marginal

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (10 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep integral tak tentu.
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep integral tak tentu

Kegiatan Inti (70 menit)

1. Penjelasan mengenai aplikasi integral tak tentu dalam ekonomi, terutama yang diaplikasikan pada konsep fungsi biaya dan fungsi penerimaan jika diketahui fungsi marginal, fungsi maksimum, atau fungsi minimumnya

2. Dua kelompok bertugas presentasi makalah yang ditugaskan. Tiga kelompok lain menyimak dan membahas.
3. Masing-masing kelompok mendiskusikan sub tema:
   Kelompok 1: Fungsi Biaya dan utilitas
   Kelompok 2: Fungsi Penerimaan dan produksi
   Satu kelompok selesai presentasi, satu kelompok yang lain membahasnya, kelompok lain menyimak dan memberikan klarifikasi
4. Penguatan dan *feedback* hasil diskusi dari dosen
5. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi
6. Penguatan materi perkuliahan oleh dosen
7. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.
2. Mengingatkan mahasiswa terhadap pekerjaan rumah yang diberikan

Lembar Kegiatan

Setiap kelompok membuat laporan hasil presentasi kelompok terhadap materi yang dibahas.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep aplikasi integral tak tentu dalam ekonomi dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Diskusikan dan bahas materi yang telah dipresentasikan kelompok presentasi!
2. Catat dan laporkan hasil diskusi di lembaran kertas
3. Berikan penilaian terhadap kelompok presentasi dengan draft penilaian sebagai berikut

Tabel 5.1: Daftar Nilai Pembuatan Presentasi

Klp	Penguasaan Materi	Kekompakan	Makalah	Powerpoint	Performance
I					
II					

Keterangan Nilai:

90 = sangat baik   80 = baik   70 = cukup   60 = kurang

Uraian Materi

Aplikasi Integral Tak Tentu dalam Ekonomi

Integral tak tentu dalam ekonomi dapat diaplikasikan untuk membuat fungsi total dari suatu fungsi marginal. Pada paket sebelumnya, yaitu pada penerapan konsep diferensial dijelaskan bahwa fungsi marjinal adalah turunan dari fungsi total, maka dengan proses sebaliknya –yakni integrasi—dapat dicari fungsi asal dari fungsi turunan tersebut atau fungsi totalnya. Diantara aplikasi integral tak tentu adalah pada fungsi biaya dan penerimaan total, fungsi utilitas total serta fungsi produksi total.

A. Fungsi Biaya

Biaya total :

$$C = f(Q)$$

Biaya marjinal

$$MC = C' = \frac{dC}{dQ} = f'(Q)$$

Biaya total adalah integrasi dari biaya marjinal

$$C = \int MC\,dQ = f'(Q)\,dQ$$

Contoh

Biaya marjinal suatu perusahaan ditunjukkan oleh MC = $3Q^2$ - 6Q + 4. Carilah persamaan biaya totalnya! Jika diketahui biaya tetapnya Rp. 4, tentukanlah besarnya biaya totalnya!

Penyelesaian

Diketahui : $MC = 3Q^2 - 6Q + 4$ $FC = k = 4$

Ditanya : pers. C….? C jika k = 4....?

C = f(Q) → MC = C′

Biaya total → $C = \int MC\,dQ = \int f'(Q)\,dQ$

$$C = \int MC\,dQ$$

$$= \int (3Q^2 - 6Q + 4)\,dQ$$

$$= \frac{3\,Q^{2+1}}{2+1} - \frac{6\,Q^{1+1}}{1+1} + \frac{4\,Q^{0+1}}{0+1}$$

$$= \frac{3\,Q^3}{3} - \frac{6\,Q^2}{2} + \frac{4\,Q^1}{1}$$

$$C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + k$$

Jika k = 4 → $C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + k$

$$C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$$

B. Fungsi Penerimaan

Penerimaan total : $R = f(Q)$

Pemerimaan marjinal : $MR = R' = \frac{dR}{dQ} = f'(Q)$

Penerimaan total tak lain adalah integral dari penerimaan marjinal

Contoh

Carilah persamaan penerimaan total dari suatu perusahaan jika penerimaan marjinalnya MR = 16 – 4Q!

Penyelesaian

Diketahui : MR = 16 – 4Q

Ditanya : pers. R….?

Penyelesaian:

R = f(Q) → MR = R′

Penerimaan total → R = ∫ MR dQ = ∫ f′ (Q)

R = ∫ MR dQ

= ∫ (16 – 4Q) dQ

= $16Q - 2Q^2$

Notes : *Dalam persamaan penerimaan total konstanta k = 0, sebab penerimaan tidak akan ada jika tak ada barang yang dihasilkan atau terjual.*

C. Utilitas

Utilitas total : $U = f(Q)$

Utilitas marjinal : $MU = U' = \frac{dU}{dQ} = f'(Q)$

Utilitas total adalah integral dari utilitas marjinal

$$\boxed{U = \int MU\, dQ = \int f'(Q)\, dQ}$$

Utilitas adalah tingkat kesenangan atau kepuasan yang muncul dari mengkonsumsi suatu barang atau jasa. Sedangkan ***Utilitas***

marjinal adalah tambahan kepuasan atau tambahan penggunaan barang atau jasa.

Penambahan kepuasan ini didapat seorang konsumer ketika mereka mendapatkan manfaat tambahan dari barang dan jasa tambahan yang dikonsumsi atau digunakan.Selain itu, marginal utilitas juga sangat berhubungan dengan salah satu hukum di dalam dunia ekonomi, yaitu *The Law of Diminishing Marginal Utility.* Hukum ini menyatakan bahwa untuk setiap penambahan barang yang dikonsumsi atau digunakan, maka tingkat kepuasan seseorang akan terus bertambah hingga mencapai titik kepuasan maksimal, dan kemudian menurun jika tingkat konsumsi tersebut terus ditambah. Contoh : Saat merasa haus, Andi meminum 1 gelas air dan mendapatkan tingkat kepuasan 5. Lalu, Andi meminum 1 gelas air tambahan dan tingkat kepuasannya bertambah menjadi 10. Selanjutnya, walaupun sudah tidak haus, Andi kembali meminum gelas air yang ketiga. Saat Andi meminum gelas ketiga tersebut, tingkat kepuasan Andi tidak lagi bertambah melainkan berkurang menjadi 8. Hal ini terjadi karena Andi sudah tidak lagi haus, dan saat itu juga nilai manfaat air bagi Andi sudah menurun. Jika Andi terus meminum air, maka tingkat kepuasan Andi akan semakin menurun, bahkan dapat menjadi negatif.

Contoh

Carilah persamaan utilitas total dari seorang konsumen jika utilitas marjinalnya MU = 90 – 10Q!

Penyelesaian:

Diketahui : MU = 90 – 10Q

Ditanya : pers. U….?

Penyelesaian:

$U = f(Q)$	$\rightarrow$	MU	$= U'$	
Utilitas total		$\rightarrow$	U	$= \int MU\, dQ = f'(Q)\, dQ$
adalah integral dari			U	$= \int MU\, dQ$
utilitas marjinal			U	$= \int (90 - 10Q)\, dQ$
			U	$= 90Q - 5Q^2$

Notes : *Dalam persamaan utilitas total konstanta k = 0, sebab kepuasan konsumen tidak akan ada jika tak ada barang yang dikonsumsi*

D. Produksi

Produksi adalah proses mengubah input menjadi output. Produksi meliputi semua kegiatan untuk menciptakan/menambah nilai/guna suatu barang/jasa. Fungsi produksi menunjukkan hubungan antara faktor-faktor produksi (input) dan tingkat produksi yang diciptakan (output)

Fungsi produksi dirumuskan $Q = f(K, L, R, T)$.

Q = output

K = modal

L = tenaga kerja

R = kekayaan alam

T = Teknologi

Sedangkan Produk total (Total product) yaitu keseluruhan output yang dihasilkan dari hasil penggunaan sejumlah faktor produksi tertentu. Produk rata-rata (Average product) yaitu produksi yang dihasilkan oleh satu orang tenaga kerja /input variabel ($AP = TP / L$), dan produk marjinal (marginal product) yaitu tambahan produk yang diakibatkan oleh bertambahnya seorang tenaga kerja, dan sebaliknya ($\Delta TP / \Delta L$)

Produk total : $P = f\ (x)$ dimana,

P = keluaran; X = masukan

Produk marjinal : $MP = = P = \frac{dP}{dX} = f'(x)$

Produk total adalah produk marjinal

$$\boxed{P = \int MP\ dX = \int f'(\ Q\ X)\ dX}$$

Contoh:

Produk marjinal sebuah perusahaan ditentukan oleh MP = $18x - 3x^2$. carilah persamaan produk totalnya!

Diketahui : MP = $18x - 3x^2$

Ditanya : Pers. P….?

Penyelesaian :

P = f(x) di mana : P : hasil produksi, x : faktor produksi

Produk total → MP = P′

$P = \int MPdX = \int f'(x)\ dX$

$P = \int MPdX$

$P = \int (18x - 3x^2)\ dX$

$P = 9x^2 - x^3$

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

Soal-soal Latihan.

1. Biaya marginal ditunjukkan oleh $MC = 108 – 45q + 3q^2$, biaya tetapnya adalah 300. Tentukalah:
   (a) fungsi biaya totalnya
   (b) fungsi biaya rata-rata dan fungsi biaya variabel
2. Penerimaan marginal ditunjukkan oleh $MR = 200 -20q – 15q^2$
   (q = kualitas barang). Tentukanlah:
   (a) fungsi penerimaan total da fungsi penerimaan rata-rata.
   (b) Penerimaan total dan harga tiap unit barang aabila barang yang terjual sebayak 4 unit
3. Carilah persamaan utilitas total dari eorang konsumen jika utilitas marjinalnya $MU = 90 – 10 Q$.
4. Produk marjinal sebuah perusahaan dicerminkan oleh $MP=18 X-3X^2$. Carilah persamaan produk total dan produk rata-ratanya

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya*. Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 13
INTEGRAL TERTENTU

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep integral tertentu dalam ekonomi. Kajian dalam paket ini meliputi konsep integral tertentu, kaidah-kaidah integral tertentu, penggunaan kaidah integral dalam penyelesaian soal.

Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait konsep integral tertentu yang dipahami selama ini; kedua dosen memberi tugas untuk membaca uraian materi; ketiga dosen membahas materi perkuliahan disertai pemberian contoh-contoh kasus ekonomi; keempat penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Kemampuan memahami konsep integral tertentu dalam ekonomi

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan konsep integral tertentu
2. Menyelesaikan persoalan integral tertentu dengan menggunakan kaidah integral tertentu

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Konsep integral tertentu
2. Kaidah-kaidah integral tertentu

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (10 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep integral tertentu
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep integral tertentu

Kegiatan Inti (70 menit)

1. Penjelasan mengenai konsep integral tertentu dan kaidah-kaidah integral tertentu
2. Membagi mahasiswa dalam 5 kelompok
3. Masing-masing kelompok diberikan tugas menyelesaikan soal terkait integral tertentu
4. Masing-masing kelompok membahas dan menyelesaikan soal yang diberikan kemudian menyerahkan hasil penyelesaian soal kepada dosen
5. Presentasi hasil diskusi terhadap kelompok terpilih

6. Selesai presentasi, kelompok yang tidak presentasi memberikan klarifikasi
7. Penguatan hasil presentasi oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.
2. Mengingatkan mahasiswa untuk menyelesaikan pekerjaan rumah yang diberikan.

Lembar Kegiatan

Setiap kelompok menyelesaikan soal-soal yang diberikan

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep integral tertentu dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Bahas soal-soal yang diberikan dengan kelompok masing-masing
2. Laporkan hasil diskusi kelompok secara individu dalam selembar kertas

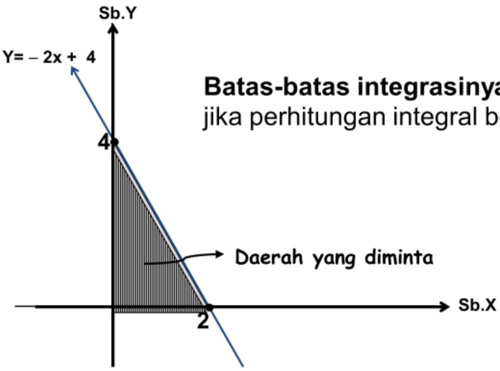
Uraian Materi

A. Konsep Integral Tertentu

Integral tertentu adalah integral dari suatu fungsi yang nilai-nilai variabel bebasnya memiliki batas-batas tertentu x = a (batas bawah) dan x = b (batas atas) dan digunakan untuk menentukan luas daerah di bawah kurva dan antar dua kurva . Jadi, luas daerah di bawah kurva dari suatu fungsi dengan batas bawah = a dan batas atas = b adalah F(b) - F(a) (integral dari suatu fungsi dengan nilai batas atas = b dikurangi integral dari fungsi yang sama dengan batas bawah = a)

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = Fb - Fa}$$

Contoh: Daerah yang dibatasi oleh garis Y= –2x + 4 adalah



Batas-batas integrasinya adalah: Dari 0 sampai **2**, jika perhitungan integral berbasis (ke arah) Sb. ***X***

$$L = \int_0^2 -2\boldsymbol{x} + 4\ \boldsymbol{dx}$$

- Sifat – sifat integral tertentu

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx, a < b < c$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Luas daerah yang dibatasi kurva y=f(x) dan sumbu x dengan batas x_1=a dan x_2=b, dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\boxed{L = \int_a^b f(x)dx}$$

B. Contoh dan Penyelesaian

Contoh 1:

Bila diketahui $y = f(x) = x^3 + 3x^2$ dengan batas x = 0 dan x = 2. Tentukan luas daerah di bawah kurva tersebut,

Penyelesaian :

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^3 + 3x^2)dx = [1/4x^2 + x^3]_0^2 = 1/4(2)^4 + (2)^3 - 0 = 12$$

Jadi luas daerah fungsi tersebut adalah 12 satuan luas.

Contoh 2:

Bila diketahui y= f (x) = L= 4 – x^2 dengan batas x = -2 dan x= 2. Tentukan luas daerah di bawah kurva tersebut.

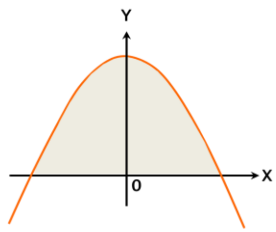
Penyelesaian :

$$L = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx$$

$$L = \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$L = (8 - \tfrac{8}{3}) - (-8 + \tfrac{8}{3})$$

$$L = \frac{32}{3} = 10\tfrac{2}{3}$$



Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Integral tertentu adalah integral dari suatu fungsi yang nilai-nilai variabel bebasnya memiliki batas-batas tertentu x = a (batas bawah) dan x = b (batas atas) dan digunakan untuk menentukan luas daerah di bawah kurva dan antar dua kurva
2. Rumus integral tertentu adalah

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = Fb - Fa}$$

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1). $\int$ X dX = ….
1
3

2). $\int$ (X^2 – 2X + 3) dX = …
0
1

3). $\int$ (2X + 5) dX = …
-1
2

4. $\int$ ($3X^2$ + 2X) dX = …
0
2

5). $\int$ X^4 dX = …
2
3

6). $\int$ (2X + 1)(3 – X) dX = …
1
4

7). $\int$ $X^{1/2}$ – 2 dX = …
1
3

8). $\int$ (32 – 4X - X^2) dX = …..
0
20

9. $\int$ (X + $9X^3$) dX = …
1

10. $\int$ (15 – 0.25x) dX = …
0

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya.* Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.

Paket 13
APLIKASI INTEGRAL TERTENTU DALAM EKONOMI

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada aplikasi konsep integral tertentu dalam ekonomi. Kajian dalam paket ini meliputi aplikasi konsep integral tertentu dalam surplus konsumen dan surplus produsen.

Langlah-langkah perkuliahan yang dilakukan yaitu pertama, mengajak mahasiswa untuk curah pendapat terkait konsep integral tertentu yang telah dibahas pada paket sebelumnya; kedua dosen mempersilahkan kelompok presentasi untuk memaparkan makalahnya terkait topik yang diberikan; ketiga dosen membahas hasil presentasi dan diskusi kelas; keempat refleksi dan penugasan berupa latihan soal.

Dalam perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa lembar tugas dan laptop.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Kemampuan memahami aplikasi konsep integral tertentu dalam ekonomi

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan konsep surplus konsumen dan surplus produsen
2. Menghitung nilai surplus konsumen dan surplus produsen
3. Menggambar grafik surplus konsumen dan surplus produsen

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

1. Konsep surplus konsumen dan surplus produsen
2. Metode menggambar surplus konsumen dan surplus produsen

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan Awal (10 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Penjelasan langkah kegiatan perkuliahan paket ini
4. Brainstorming pengetahuan awal mahasiswa terhadap konsep integral tertentu
5. Penjelasan pentingnya menguasai konsep integral tertentu

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Penjelasan mengenai aplikasi integral tertentu dalam ekonomi, terutama yang diaplikasikan pada konsep surplus konsumen, dan surplus produsen.
2. Mahasiswa berkelompok sesuai kelompok masing-masing. Satu kelas terdapat lima kelompok.
3. Dua kelompok bertugas presentasi makalah yang ditugaskan. Tiga kelompok lain menyimak dan membahas.

4. Masing-masing kelompok mendiskusikan sub tema:
   Kelompok 1: Surplus Konsumen
   Kelompok 2: Surplus Produsen
   Satu kelompok selesai presentasi, satu kelompok yang lain membahasnya, kelompok lain menyimak dan memberikan klarifikasi
5. Penguatan dan *feedback* hasil diskusi dari dosen
6. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi
7. Penguatan materi perkuliahan oleh dosen
8. Dosen memberikan kesempatan mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi.

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.
2. Memberikan soal latihan

Lembar Kegiatan

Setiap kelompok membuat laporan hasil presentasi kelompok terhadap materi yang dibahas.

Tujuan

Mahasiswa dapat melaporkan pemahaman konsep aplikasi integral tertentu dalam ekonomi meliputi surplus konsumen dan surplus produsen dalam ekonomi dengan didukung adanya sharing ide dan transfer pengetahuan antar anggota kelompok.

Bahan dan Alat

Kertas, alat tulis, dan penggaris

Langkah Kegiatan

1. Diskusikan dan bahas materi yang telah dipresentasikan kelompok presentasi!
2. Catat dan laporkan hasil diskusi di lembaran kertas
3. Berikan penilaian terhadap kelompok presentasi dengan draft penilaian sebagai berikut

Tabel 5.1: Daftar Nilai Pembuatan Presentasi

Klp	Penguasaan Materi	Kekompakan	Makalah	Powerpoint	Performance
I					
II					

Keterangan Nilai:

90 = sangat baik   80 = baik   70 = cukup   60 = kurang

Uraian Materi

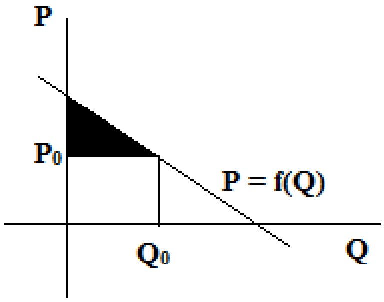
A. Surplus Konsumen

Fungsi permintaan P = f(Q), seperti dalam gambar (13.1), menunjukkan persamaan yang menunjukkan hubungan antara jumlah barang yang dibeli dengan haraga barang tersebut. Harga keseimbangan pasar yang terjadi adalah Pe, dan jumlah barang yang diminta Qe .

Apabila kemampuan daya beli konsumen perunit barang di atas dari harga pasar (Pe) atau Harga pasar dalam kenyataannya di bawah kemampuan daya beli konsumen berarti konsumen mendapat keuntungan utilitas (bukan keuntungan yang sebenarnya). Oleh karena itu Surplus Konsumen merupakan keuntungan utilitas yang diperoleh konsumen sebagai dampak dari kenyataan bahwa harga pasar (Pe) lebih rendah dari kemampuan daya beli konsumen per unit barang (P).

Untuk Menentukan Besarnya Surplus Konsumen (Keuntungan Utilitas Total Konsumen) menggunakan rumus:

SK = $\int_{Q0}^{Qe} f(D).\, dQ - Qe.Pe$ **;**



Gambar 13.1: Surplus Konsumen

Contoh :

Diketahui Fungsi Permintaan : P = -Q + 6; Kuantitas dan Harga Keseimbangan Pasar (Qe = 2 dan Pe = 4). Tentukan Besarnya Surplus Konsumen …..?

Penyelesaian

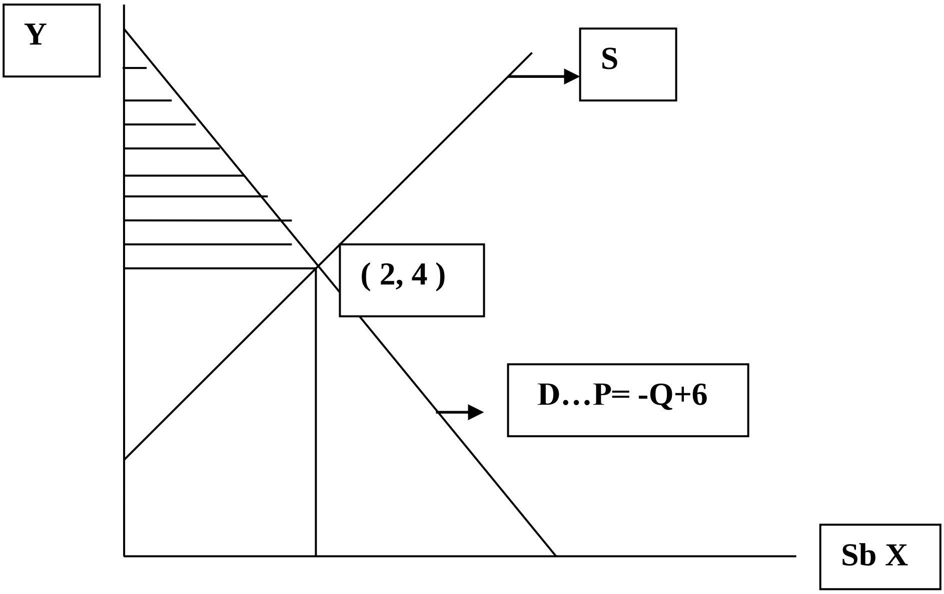
$$SK = \int_0^2 (-Q+6)).\, dQ - Qe.Pe$$

$$SK = {}_{-1/2}\, Q^2 + 6Q \;\; {}_0/^2 - (2.4)$$

$$SK = \{-1/2\,(2)^2 + 6(2)\} - \{-1/2\,(0)^2 + 6(0)\} - (8)$$

$$SK = 2$$

Gambar Surplus konsumen dapat dilihat di bawah ini



B. Surplus Produsen

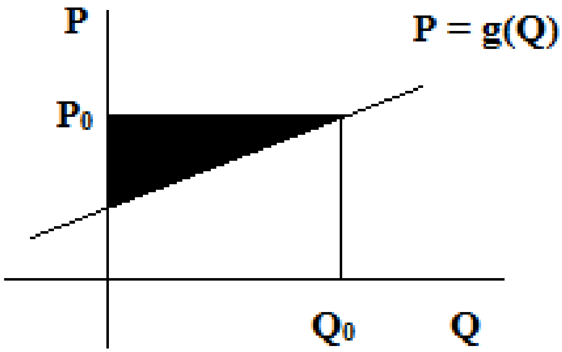
Fungsi permintaan P= g(Q), seperti dalam gambar (13.2), menunjukkan kuantitas barang yang ditawarkan pada berbagai tingkat harga. Jika harga pasar Pe dan jumlah penawaran Qe. Produsen sebenarnya bersedia menawarkan barangnya dengan harga di bawah harga pasar Pe. Dalam posisi seperti ini berarti penjual/produsen beruntung (produsen mendapat keuntungan utilitas).

Surplus Produsen adalah keuntungan utilitas yang diperoleh produsen sebagai dampak dari harga pasar di atas harga kesediaan penjual untuk menjual barangnya.

Surplus Produsen dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\mathbf{SP = Qe.Pe - \int_{Q0}^{Qe} f(Q).\, dQ}$$

$$\mathbf{SP = Qe.Pe - \int_{Q0}^{Qe} f(S).\, dQ.}$$



Gambar 13.2 (Surplus Produsen)

Contoh

Diketahui Fungsi Penawaran : P = Q + 4 ; jika harga keseimbangan pasar diketahui Pe = 7 ; Tentukan besarnya Surplus Produsen....?

Penyelesaian

Jika diketahui Pe = 7 maka

Pe = Qe + 4

7 = Qe + 4 . Sehingga Qe = 7 – 4 = 3. Jadi (Qe, Pe) adalah (3,7)

$$\mathbf{SP = Qe.Pe - \int_{Q0}^{Qe} f(S).\, dQ.}$$

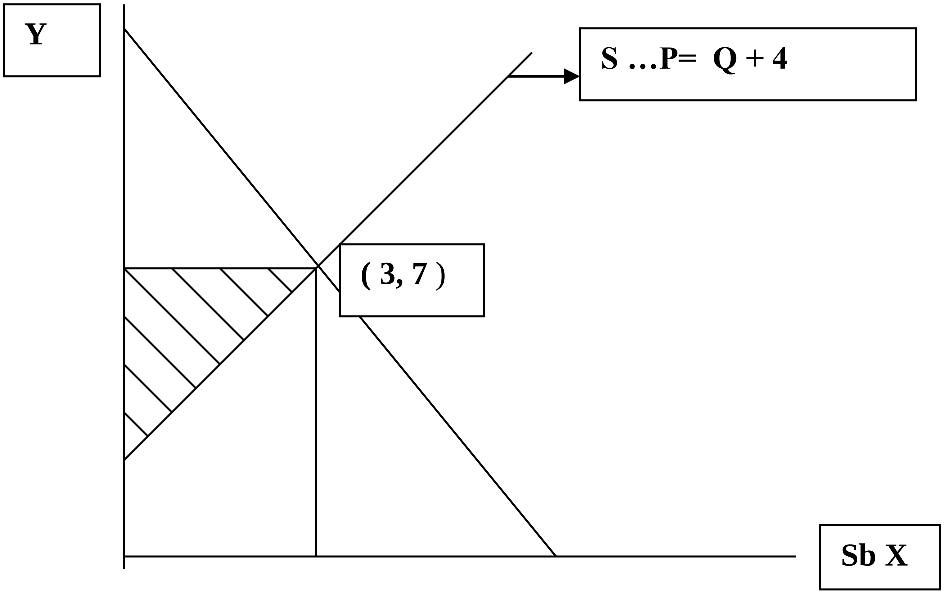
$$\mathbf{SP = 3.7 - \int_{0}^{3} (4 + Q).\, dQ}$$

$$\mathbf{SP = 21 - \{ 4Q + \tfrac{1}{2} Q^2\} \,_0/^3}$$

$$\mathbf{SP = 21 - \{(4.3 + \tfrac{1}{2}.\, 3^2) - (4.0 + \tfrac{1}{2}.\, 0^2)\}}$$

$$\mathbf{SP = 21 - 16{,}5 = 4{,}5.}$$

Gambar surplus produsen dapat dilihat di bawah ini



Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Surplus Konsumen merupakan keuntungan utilitas yang diperoleh konsumen sebagai dampak dari kenyataan bahwa harga pasar (Pe) lebih rendah dari kemampuan daya beli konsumen per unit barang (P). **SK =** $\int_{Q0}^{Qe}$ **f(D). dQ - Qe.Pe ;**
2. Surplus Produsen adalah keuntungan utilitas yang diperoleh produsen sebagai dampak dari harga pasar di atas harga kesediaan penjual untuk menjual barangnya.

$$SP = Qe.Pe - \int_{Q0}^{Qe} f(S).\ dQ$$

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Diketahui Fungsi Permintaan : P = - Q + 10; Jika Harga Keseimbangan Pasar (Pe = 4). Tentukan Besarnya Surplus Konsumen dan gambarkan grafiknya …..?
2. Diketahui Fungsi Permintaan : P = - Q^2 + 16; Jika Harga Keseimbangan Pasar (Pe = 12). Tentukan Besarnya Surplus Konsumen dan gambarkan grafiknya…..?
3. Fungsi penawaran suatu barang diberikan oleh persamaan P = 7+3Q Tentukan surplus produsen jika harga keseimbangannya adalah 13 dan gambarkan grafiknya!
4. Fungsi penawaran $\rightarrow P = 0{,}5Q + 3$. Berapakah surplus produsen, jika tingkat harga keseimbangan pasar $P = 10$ dan gambarkan grafiknya!

Daftar Pustaka

Chiang, Alpha. *Fundamental Methods of Mathematical Economic*. Tokyo:Internastional Student Edition, Mc Graw Hill Kogakusha Ltd, 2000.

Du Mairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE, 2005.

Bumulo, Hussain. Joko Mursinto, *Matematika Ekonomi dan Aplikasinya*. Surabaya: Bayu Media, 2008.

M. Nababan, *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi*. Jakarta:Erlangga, 2006.